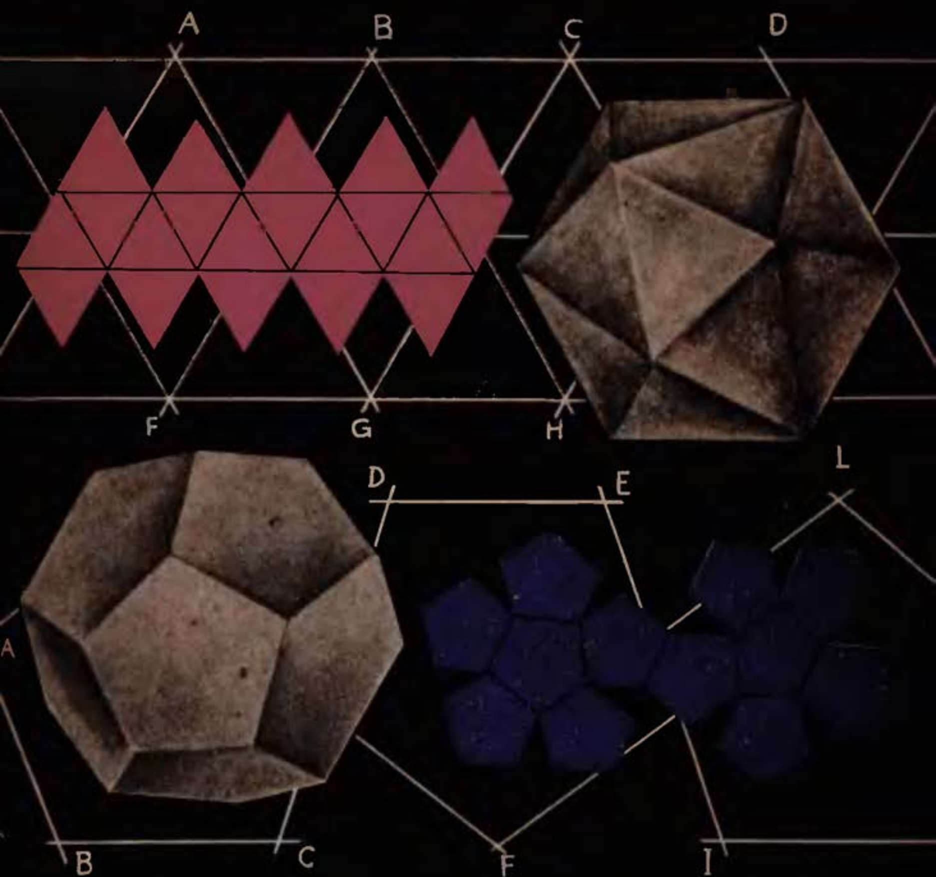
Eugen Rusu

DE LA TALES LA EINSTEIN



Lyceum

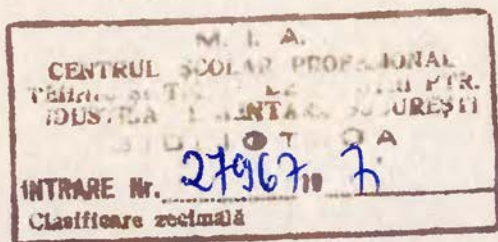
Coperta de
VICTOR APOSTOLOIU

Lyceum

Eugen Rusu

DE LA TALES LA EINSTEIN

Gîndirea matematică în perspectiva istorică



Editura Albatros 1971

CE ESTE MATEMATICA?

S-a făcut o anchetă printre elevii de liceu cu întrebarea: *Ce este matematica?*

S-au obținut răspunsuri fie foarte parțiale, fie cu vădite stîngăcii, cum ar fi: matematica studiază dependența reciprocă între mărimi...; matematica se ocupă cu rezolvarea problemelor de aritmetică, algebră și geometrie...; matematica studiază legile fundamentale ale matematicii... Profesorii claselor în care se făcea ancheta au căutat scuze și au spus așa: „de vreme ce elevii studiază matematica, ei o cunosc în fapt, așa că e inutil să mai discute despre ea."

Dumneavoastră ce-ați fi răspuns?

Citind, fiindcă și eu sînt profesor de matematică, mi-am pus aceeași întrebare: oare eu ce-aș fi răspuns? Și constatai, dezorientat, că răspunsul sincer era: nu prea știu.

M-am gîndit atunci să caut să mă documentez, să văd ce spun matematicienii mari despre obiectul activității lor.

DEFINIȚII DIFERITE...

Am ajuns la constatarea că nu numai elevii fac matematică fără să poată spune ce fac, ci și matematicienii înșiși...

Bertrand Russel, creatorul logicii matematice (filozof cunoscut marelui public prin lupta lui pentru pace), afirma undeva că matema-

tica este „o materie în care nu știm niciodată despre ce vorbim, nici dacă ce spunem este exact". Era desigur o glumă — dar care glumă nu are și un substrat serios?

Iar un alt filozof, văzînd că tezele despre obiectul matematicii sînt foarte controversate, a considerat oportun să taie acest nod gordian cu formula: „matematica este ceea ce fac matematicienii..." Ceea ce seamănă cu teza profesorului citată mai sus: de vreme ce elevii studiază matematica, știu ce este ea...

Lăsînd la o parte glumele, am extras din cărțile pe care le-am consultat — deci am făcut și eu un fel de anchetă, nu printre elevi, ci printre matematicieni — următoarele „definiții":

(1) Bacon: matematicii pure îi aparțin acele științe care studiază cantitatea complet separată de materie și de axiomele filozofiei naturale. Există două astfel de științe: Geometria și Aritmetica; una are a face cu cantitatea continuă, cealaltă cu cea discretă.

(2) Wigner: matematica este știința unor operații ingenioase, cu concepte și reguli inventate tocmai în acest scop. Cea mai mare parte din conceptele matematice au fost astfel inventate încît să devină subiecte potrivite în legătură cu care matematicianul poate să și demonstreze inventivitatea și simțul frumuseței formale.

(3) Vebler și Young: subînțelegem prin termenul de știință matematică orice ansamblu de propoziții aranjat în conformitate cu o succesiune de deducții logice.

(4) Robinson: O teorie matematică trebuie judecată după norme estetice cum ar fi frumusețea ei sau justificarea internă.

Sînt aici imagini ale matematicii care mi se par a fi toate juste, dar parțiale, obținute din puncte de vedere diferite. Problema este de a le integra într-un tot. Nu înainte de a adăuga un al cincilea aspect, care a scăpat celor cinci enunțuri, valența educativă. În această privință cred nimerit să însemn aici cuvintele unuia din ctitorii școlii noastre, rostite în dulcele grai moldovenesc și care, cu tot parfumul lor arhaic, își păstrează prospețimea, actualitatea.

(5) Gh. Asachi: Aritmetica, deosebit de întrebuințarea ei cea de obște, coprinde precum toate celelalte științe exacte, folosul de a deprinde cugetarea și pătrunderea la înțelegere și a da plăcere pentru deslușirea ideilor; de aceea Aritmetica trebuie să se învețe ca un mijloc de deprindere a înțelegerii iar nu într-un kip mecanic sau ca un lucru numai de ținere de minte. Nu este în destul ca școlarul să

învețe regulile pe din afară, ci trebuie să dea și cuvîntul pentru fiecare regulă; școlarul trebuie să se povățuiască astfeliu la această învățătură, încît să poată găsi singur regula.

ISTORIA MATEMATICII

Matematica este un fenomen complex care nu se lasă cuprins într-o formulă scurtă, bună de tipărit cu litere cursive și de pus în dicționar. Ca să înțelegem acest fenomen, nu putem să ne mărginim la matematica *făcută*, la aceste raționamente impecabile scrise în tratate. Ele sînt rezultatul unei activități *umane*, adesea îndelungă și pasionantă, avînd ca unul din stimulii principali, „plăcerea la deslușirea ideilor". Rezultatul, cristalul unei expuneri pur logice, nu poate fi înțeles fără procesul în sine de cristalizare, fără perspectiva psihologică și istorică.

Încercăm în lucrarea de față să oferim tinerilor învățăcei ai matematicii o astfel de perspectivă.

Nu este vorba de o istorie propriu-zisă, completă; intenționăm să înfățișăm numai liniile ei mari, anumite puncte nodale ale dezvoltării matematicii. Deși memoria umanității — istoria — păstrează cu pietate numeroase nume cu merite deosebite în necurmata luptă cu necunoscutul, nu evocăm mai îndeaproape decît cîteva (10—12) figuri ilustre de matematicieni, pe acei care ni s-au părut cei mai reprezentativi pentru o istorie, în linii mari, a ideilor.

Cititorul interesat va găsi informații istorice complete și detailate în lucrările de specialitate. Noi am ales — alegere, în mod fatal, cu un anumit grad de subiectivitate — faptele care ni s-au părut mai semnificative. Am alăturat acestor fapte unele comentarii — și ele, probabil, foarte subiective — menite nu a da soluții, cît a invita pe cititor să-și facă propriile lui reflecții.

Nici la întrebarea cu care am început, *Ce este matematica?*, nu aducem un răspuns cristalizat.

Este cred misiunea actualilor tineri, viitorii cercetători și utilizatori ai științei, ai culturii, să înțeleagă mai profund decît înaintașii lor acest fenomen cu o atît de interesantă semnificație umană și cu atît de bogate implicații în viața socială — care este matematica.

Capitolul I

MATEMATICA — MEŞTEŞUG

AHMES

Realizările Egiptului antic au intrigat pe oricine le-a văzut sau a auzit despre ele şi, în special, evident, pe oamenii pasionaţi de istoria culturii. Cum au reuşit să construiască piramide uriaşe (înălţimea peste 100 de metri) din blocuri masive de piatră? Şi pentru tehnica modernă ar fi o problemă nu chiar uşoară, dar dacă i s-ar cere unui inginer actual: fă o astfel de construcţie *cu mijloacele de atunci*, folosind deci ca energie numai forţa musculară a oamenilor — admitem pentru a uşura problema că avem la dispoziţie oricît de mulţi oameni — ar reuşi el să găsească soluţia?

Mumiile egiptene s-au conservat de-a lungul mai multor mii de ani. Cum le îmbălsămau? Ce soluţii chimice foloseau? Am reuşi noi, cei de astăzi, să realizăm îmbălsămări atît de durabile?

Cum procedau ei şi mai ales în ce fel descoperiseră soluţiile pe care le aplicau?

Se înţelege cîtă pasiune s-a pus în descifrarea documentelor scrise care s-au descoperit acolo, problemă frumoasă în sine — să înţelegi un text fără să cunoşti nici limba şi nici semnificaţia semnelor (litere? silabe? cuvinte?) — problemă care interesa însă şi prin soluţia ei: vom afla oare ceva din „secretele lor de lucru"?

În particular, istoricul matematicii era atras şi de faptul că piramidele au o orientare foarte precisă în raport cu punctele cardinale şi chiar cu alte fenomene de ordin astronomic. Ei se întrebau pe drept cuvînt: astfel de realizări tehnice nu ne îndreptăţesc să credem că ei aveau şi cunoştinţe avansate de matematică şi de astronomie?

Spre sfîrşitul secolului trecut s-a reuşit să se descifreze un papirus — deţinut azi în colecţia Rhind a Muzeului britanic — care stîrnea curiozitate încă din titlu şi care, prin conţinut, avea să aducă un răspuns, fie şi aproximativ, la întrebările de mai sus. Manuscrisul era intitulat: *Instrucţiuni pentru a cunoaşte toate lucrurile secrete*; era scris de un preot cu numele *Ahmes* într-un timp evaluat cam la 1 000 ani î.e.n., fiind probabil copia, îmbunătăţită, a unei opere cu încă 1 000 de ani mai veche.

Ce fel de matematică aveau vechii egipteni

Egiptenii ştiau că triunghiul cu laturile 3, 4, 5 este dreptunghic şi foloseau acest fapt pentru a duce o perpendiculară pe teren (un triunghi „de sfoară" cu noduri la distanţele 3, 4, 5 ţinut întins, fig. 1), în particular,

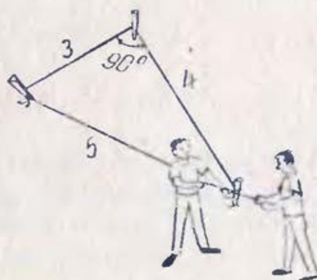


Fig. 1

după ce fixau direcția nord-sud prin observarea mișcării aparente a stelelor, aveau posibilitatea să traseze cu ajutorul acestui triunghi și direcția est-vest.

Știau să calculeze anumite arii și volume. Procedeul prin care calculau aria unui cerc s-ar exprima în limbajul de astăzi prin formula $\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$, unde d este diametrul; aceasta înseamnă că π avea pentru ei valoarea 3,16. De remarcat că este o valoare mult mai apropiată de cea adevărată decît la alte popoare ale antichității; din cărțile sfinte ale evreilor rezultă că aceștia — ca și babilonienii — lucrau cu $\pi \approx 3$ (afirmînd că lungimea cercului este de 3 ori mai mare ca a diametrului).

În aritmetică, egiptenii — așa cum rezultă din papirusul menționat — ajunseseră să se ocupe și cu calcule cu fracții, însă foloseau în special fracțiile cu numărătorul 1 (unități fracționare), silindu-se ca alte fracții să le redea sub formă de sume de diverse unități fracționare.

Foloseau și un anumit simbolism; de pildă, operația de adunare era indicată prin două picioare care fac un pas înainte. Deși unii istorici văd aici un anumit început al simbolismului algebric în sensul actual, pare mai justă interpretarea că se reflectă aici simbolismul scrierii lor, în care semnele grafice sînt scheme ale unor lucruri, ale unor acțiuni. Faptul că adunarea este indicată prin pași ne sugerează ideea că experiența ce stă la baza acestei operații este măsurarea distanțelor pe teren — deci legată de geometrie.

Acesta este în esență materialul de cunoștințe. Pentru tema noastră, nu catalogul lor complet este important; importantă e chestiunea *ce fel* de cunoștințe sînt acestea. Trebuie să mărturisim o anumită decepție, mai ales dacă ne raportăm și la cuvintele de laudă pentru știința egipteană pe care le găsim la istoricii din antichitate; decepția privește și cantitatea, dar mai ales calitatea acestor cunoștințe.

Sînt procedee găsite prin experiență, prin verificări practice, îmbunătățite apoi tot prin experiență, fixate și transmise sub formă de „reguli". Este aceasta matematică? Pare a fi prin obiectul problemelor. Nu este încă matematică

propriu-zisă din cauza metodei; matematica începe atunci cînd adevărul se stabilește prin judecată, prin deducții logice. Sînt și astăzi elevi — în clasele mici — interesați și absorbiți exclusiv de *cum se face*, fără o curiozitate activă pentru *de ce* se face așa. Cînd învață de pildă regula de calcul a rădăcinii pătrate (coborîm grupa următoare, dublăm rezultatul, vedem de cîte ori etc.), sînt foarte satisfăcuți aplicînd-o și satisfacția se vede în special cînd face proba și exclamă: „mi-a ieșit !" La problema de a justifica rațional acest procedeu, mai puțini elevi — repetăm, dintre cei mici — manifestă curiozitate; de vreme ce știu cum se face, nu-i destul? — aceasta pare a fi întrebarea pe care o citești pe figura lor, puțin mirată, puțin decepționată. Să nu surprindă această apropiere între un fenomen pedagogic și unul istoric; și în matematică există un fel de „ontogenia repetă filogenia", în înțelesul: evoluția matematică a unui individ este, cu prescurtări, asemănătoare cu evoluția istorică a umanității.

Decepția noastră la „examenul" pe care l-am făcut cunoștințelor matematice ale egiptenilor, nu este justificată. Examinatorul a fost prea pretențios: s-a așteptat la prea mult, nu a ținut seama de condițiile în care s-a pregătit cel examinat.

Geometria în faza de geo-metrie

Geometria, această artă subtilă de a stabili proprietăți prin raționamente, era pe atunci numai un meșteșug, numai ceea ce o arată numele: geo-metrie, „măsurarea pămîntului". Ca să apară geometria în sensul ei actual, a fost necesar — o necesitate de ordin istoric și de ordin psihic — să se plece de la geo-metrie, de la o serie de experiențe care închideau în ele, în stare potențială, ca într-o sămînță încă necoaptă, problematica geometriei; și a mai fost necesară o transformare calitativă care nu putea apare decît într-un moment de maturizare — despre care vom vorbi ceva mai tîrziu.

Într-o concepție idealistă, se poate *imagina* — dar nu tot ce ne imaginăm este real — ipoteza că un om, care probabil nu avea ceva mai bun de făcut, și-a propus să stabilească că într-un triunghi înălțimile sînt concurente. Legile psihologice umane arată că ivirea „din senin" a unei astfel de preocupări nu e posibilă.

Premisa geometriei — necesară psihologic, dacă nu și logic — e închisă în problemele de geometrie practică.

Iar geo-metria la rîndul ei are ca premisă necesități de ordin tehnic. În etapa istorică de care vorbim, răspunsul imediat la probleme de viață nu poate fi decît empiric, limitat, aproximativ. Plin de defecte deci, în schimb cu marea calitate de a fi operativ, imediat util. Ar fi mai bună — din nou, în condiții „ideale" — o soluție generală și exactă. Ar fi, dar viața nu dă răgaz — și nici dispoziție, și nici elemente pregătitoare — să o cauți. Tehnica pune în primul rînd probleme tot de tehnică, abia într-o etapă superioară tehnica pune probleme de *știință* (soluții generale și exacte) și mult mai tîrziu, în condiții istorice de maturizare a culturii, se ajunge și la situația ca știința, dezvoltată prin mijloace proprii, să pună ea probleme noi tehnicii.

Problemele de viață care au condus la nașterea geo-metriei, specifice Egiptului, au fost în special legate de revărsările Nilului și de construcțiile templelor.

Anticii au o concepție deosebit de justă asupra originii cunoștințelor științifice — dar și asupra evoluției lor. Un fragment din istoricul Eudemus din Rhodos (aprox. anul 320 î.e.n.) este demn de luare aminte:

„...După cum arată relatările multor oameni, geometria a fost inventată mai întîi de egipteni, avîndu-și origina în măsurarea cîmpurilor. În adevăr, aceasta era necesar pentru ei din cauza inundațiilor Nilului, care ștergea hotarele proprietăților. Și să nu ne mirăm că la origina apariției atît a acesteia cît și a altor științe stă necesitatea, deoarece tot ce e supus nașterii evoluează de la neperfect la perfect, de la senzație la raționament, iar de la acesta la gîndire a avut loc o trecere naturală. Așa că, în același fel cum la fenicieni cunoștința exactă a numerelor a luat naștere din traficul și

relațiile comerciale, tot astfel și la egipteni geometria a fost inventată din motivele amintite".

Și la alte popoare din antichitatea îndepărtată apar cunoștințe matematice. Fără a face un inventar complet — deoarece ne mărginim numai la *unele* fapte semnificative pentru problema gîndirii — trebuie să menționăm că astfel de cunoștințe au avut nu numai babilonienii — ceea ce s-ar explica prin apropierea în spațiu — ci și popoarele din China, care au ajuns și la cunoștințe mai avansate, cum ar fi, pe lîngă teorema lui Pitagora, în cazuri particulare, și elemente de calcul aritmetic folosind, prin mașina de socotit cu bile, un fel de numerație cu baza 10. Dar tot cunoștințe empirice. Și fiind vorba de căi independente, de popoare care nu au împrumutat unul de la altul — aceasta confirmă că etapa empirică a fost naturală, ca fază de început, în matematică.

Începuturi de matematică „pură"

Deși matematica egipteană s-a născut direct din necesități practice, se întrevede din manualul lui Ahmes tendința oarecum naturală a activității matematice spre probleme gratuite. Găsim de pildă aici problema: „avem o cantitate necunoscută, șeptimea ei și întregul ei fac 19", cu răspunsul $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, care este exact. E de crezut că nu o situație practică a pus această problemă; este, mai curînd, o problemă „inventată", pe care autorul o pune pentru a arăta că posedă rețeta rezolvării ei. Avem aici, în mic, o tendință pe care o regăsim, uneori mai activă alteori mai latentă, și la niveluri mai ridicate ale matematicii: realitatea pune probleme prea „grele" și complexe; apare atunci tendința de a *simplifica* datele reale — ceea ce s-ar numi în limbaj modern a crea *un model matematic* — sau de a extrage un aspect parțial care să se preteze la o tratare matematică cu mijloacele existente. Această detașare de sub

imperativul practicii, deşi oferă riscul de a ancora în lucrări gratuite, are şi avantajul de a deschide o problematică mai generală, deci mai ştiinţifică decît aceea oferită direct de practică.

De ce „secrete"?

Cuvîntul secret inserat chiar în titlu este foarte bogat ca semnificaţie. Astăzi o carte se publică, intră în librării şi în biblioteci, iar autorul şi editorul sînt bucuroşi ca ea să cadă sub ochii cît mai multora. Este exact polul opus tendinţei spre „secret".

Secretul lui Ahmes are în primul rînd un pronunţat caracter de clasă. Ştiinţa preoţilor este şi puterea lor. Ştiinţă puţină, după cum am văzut; dar a cărei putere este amplificată, prin păstrarea secretului. Dacă toată lumea ar şti cum se află aria cercului, prestigiul preoţilor dar şi puterea lor ar fi sensibil micşorată. De aceea, regulile matematice se transmit de la o generaţie la alta de preoţi, cu limbă de moarte sau prin învăţături secrete. Această transmitere de reguli, de reguli în sine lipsite de orice justificare, fac să se uite procesul găsirii lor — prin verificări practice — le dau un aer de adevăruri revelate. Amestecul între astfel de reguli exacte, de ordin ştiinţific, cu reguli privind practicile cultului sau tezele de ordin metafizic convine. Profeţiile religioase nu se adeveresc totdeauna, dar aria cercului iese exact cît a „prevăzut-o" preotul. Şi desigur faptul că în multe astfel de cazuri a prevăzut exact, aduce un prestigiu pe baza căruia se iartă previziunile neîndeplinite sau se acceptă justificări întocmite ad hoc, cum ar fi aceea că, între timp, zeii şi-au schimbat voinţa.

Alături de această explicaţie pe baze sociale a păstrării în secret a unor adevăruri ştiinţifice, pentru cele matematice se adaugă şi o altă explicaţie, aceasta de ordin psihologic. Vom regăsi legea secretului, într-o formă chiar mai drastică, mai tîrziu, în şcoala lui Pitagora, unde puterea matematică

nu mai este asociată direct cu puterea politică. O vom regăsi, într-o formă atenuată, pe tot parcursul dezvoltării matematice, inclusiv în zilele noastre; înțelegem prin formă atenuată a legii secretului, tendința unor autori, uneori și a unor profesori, spre expuneri greu accesibile, nelămuritoare, în care corectitudinea logică, chiar dacă este foarte ascunsă, se consideră suficientă.

Nu e un secret total, ci doar un fel de stil „ermetic", prin care cei care îl folosesc consideră că pot cîștiga în prestigiu — în fond falsul prestigiu al celor greu de descifrat...

*

Cunoștințe puține și, cîte sînt, secrete; avînd și un defect de calitate legat de metoda îngust empirică.

Progresul va consta nu numai în înmulțirea lor și în difuzarea lor mai largă; progresul esențial îl va aduce o metodă nouă: raționamentul logic.

Capitolul II

MATEMATICA — ARTĂ GEOMETRIA PREEUCLIDIANĂ 600—300 î.e.n.

TALES

Iar istoricul Eudemus pe care l-am citat mai sus (în legătură cu nașterea geometriei, în Egipt, din necesități practice) continuă astfel:

„Thales, cel dintîi mergînd în Egipt, a adus în Elada această doctrină și multe a descoperit el însuși, pentru multe a arătat principiile, avînd cînd un caracter mai general, cînd unul mai practic."

Tales reprezintă deci nodul, punctul de trecere între geometria veche și cea nouă; el înseamnă în același timp și *preluarea* geometriei egiptene de către greci, dar și *imprimarea unei direcții noi*, care avea să aducă o transformare calitativă, esențială. Cînd acarul de cale ferată vrea să dea trenului o direcție nouă schimbă macazul; o linie nouă mai subțire este lipită de cea veche, dar totodată are o curbură astfel că în momentul trecerii prin acest punct, trenul se mișcă și după direcția veche, dar a pășit și pe o linie curbată care, după o distanță suficientă, îi imprimă direcția nouă Tales este acarul geometriei.

O cotitură în viața lui Tales: de la o carieră bănoasă la una frumoasă

A trăit între 640 și 550 î.e.n. în cetatea Milet din Asia Mică. Dar a trăit în acest interval două vieți distincte succesive, despărțite prin momentul crucial — crucial pentru el, dar și pentru dezvoltarea geometriei — al călătoriei în Egipt. De-a lungul întregii vieți, o caracteristică permanentă: spiritul viu, activ, iscoditor, perspicace al acestui om care este unul din cei șapte înțelepți ai Greciei; dar în cursul celor două vieți perspicacitatea lui naturală se îndreaptă în direcții net distincte; distincte prin *natura* preocupărilor ca și prin natura satisfacțiilor pe care acestea le oferă.

În prima parte a vieții sale, Tales este un foarte isteț om de afaceri și, totodată, un abil și înțelept om politic al cetății sale. Nu cunoaștem detalii, dar s-a păstrat amintirea unor scene semnificative.

Într-un an, se prevede o recoltă excepțional de bogată de măsline. Cu mult înainte de perioada culesului, Tales închiriază toate presele de ulei. Cînd vine culesul, toți cultivatorii trebuie să i se adreseze lui, astfel încît el poate pretinde — unor oameni în nevoie — prețuri mult mai mari decît le plătise el, realizînd în acest mod beneficii importante. Admirăm perspicacitatea dar nu și direcția în care ea se exercită. Am putea spune că aici el ne apare ca un „precursor" al monopolurilor capitaliste de astăzi, dar nu prin aceasta a rămas el în memoria recunoscătoare a oamenilor de totdeauna.

Cum își dresează asinul — e o altă povestire în care din nou îi admirăm priceperea, acum însă fără a-i aduce vreun repros de ordin moral. Asinul cară saci cu sare; trecînd prin apa unui rîu, o parte din sare se udă, se dizolvă și sarcina se ușurează. Asinul lui Tales e și el perspicace, învață din această experiență și de cîte ori ajunge la apă se cufundă cît poate. Cum să-l dezvețe? Un alt stăpîn ar fi folosit — probabil fără succes, dată fiind încăpățînarea proverbială a catîrilor — biciul. Tales folosește o experiență de același fel în sens contrar: încarcă sacii cu bureți; cînd asinul se

cufundă în rîu, bureții absorb apă, se îngreuiază, catîrul simte singur că a greșit și pe viitor... nu se mai încăpățînează.

Sagacitatea lui Tales este pusă și în slujba colectivității; el este însărcinat să proiecteze abaterea cursului unui rîu — ceea ce ne face să bănuim că era și un „inginer" priceput.

În partea a doua a vieții, Tales se dedică unor ocupații „inutile"; inutile pentru el, inutile pentru concetățenii și contemporanii săi. Dar de o imensă utilitate pentru toată umanitatea care va trăi în mileniile următoare — imensă și totuși în acea vreme încă ascunsă. Tales i se consacră numai din pasiune; Părăsește o carieră bănoasă și plină de strălucire, pentru o alta care nu este decît frumoasă în sine: aceea de filozof și geometru.

Tales umple de uimire pe regele Amasis

E foarte probabil că prima sa călătorie în Egipt, Tales o face mînat de afacerile sale comerciale. Dar odată ajuns acolo, spiritul său iscoditor îl face să privească la realitățile din jur, să nu-și țină ochii ațintiți numai în registrul de socoteli sau la clientul cu care tratează. El privește aceste realități cu un ochi proaspăt; oamenii de baștină sînt obișnuiți cu ele, atît de obișnuiți încît nu le mai văd, și, mai ales, nu le reconsideră; pentru călător ele oferă o noutate, au un dinamism, stîrnesc curiozitate și reflecții, încercarea de a le depăși sau valorifica în chip nou. Tales se pasionează pentru studii de astronomie și de geometrie.

Și ajungem la o scenă în care din uimit Tales devine uimitor. Documentele istorice sînt sărace asupra detaliilor: lăsăm ca imaginația cititorului să le completeze și mai ales să reconstituie atmosfera.

Tales anunță că poate măsura înălțimea piramidei, fără să se urce pe ea. Uimire. Fără să se urce pe ea? Fără s-o atingă? Poți măsura ceva de la distanță? [illegible] cum nu este preot, de unde ar putea el deține [illegible] zeilor?

Însuși regele Egiptului, Amasis asistă la experiență. Ce face Tales? Pentru noi, cei de astăzi, un lucru banal: înfige un baston în pămînt, îl măsoară, îi măsoară umbra, apoi măsoară umbra piramidei; două triunghiuri asemenea și înălțimea căutată nu-i decît a patra proporțională. Banal pentru noi, procedeul este extraordinar pentru atunci, de vreme ce *Plutarh* (istoricul grec din primul secol al erei noastre, autorul vestitei *Viața oamenilor iluștri)* îl descrie destul de amănunțit în opera sa, șase secole mai tîrziu.

Extraordinar, în sensul că surprinzător, ieșit din făgașul obișnuinței, este faptul unei măsurători *indirecte*: din anumite date măsurate direct *se deduce*, prin rațiune, mărimea necunoscută: se conturează aici direcția nouă în matematică, care va forma trăsătura ei specifică: depășirea cunoașterii directe date de simțuri, prin căutarea a ce se poate deduce pe cale rațională din aceste date.

Extraordinar pentru Amasis și pentru suita sa este și faptul că preoții egipteni nu au în tezaurul lor de reguli și pe aceasta. Să ne situăm în mentalitatea lor pentru a intui importanța cotiturii. Cum, un om obișnuit, care nu invocă sprijinul zeilor, poate realiza o astfel de minune? Codul sacru de reguli, transmis prin „instrucțiuni secrete“ nu este fix? Poate fi îmbogățit și încă de un simplu muritor numai prin propria lui gîndire?

Prin această experiență — astăzi simplă — Tales nu a făcut numai o „aplicație pe teren“ a unei teoreme de geometrie. A făcut un lucru mult mai prețios: micșorînd încrederea în zei, a mărit încrederea în oameni.

Opera lui Tales în geometrie

Într-o enumerare seacă — idei fixate în insectar — opera sa geometrică poate fi rezumată în următoarele teoreme:

1) unghiurile de la baza triunghiului isoscel sînt egale;

2) dacă se dau o latură și unghiurile adiacente ale unui triunghi, acesta este complet determinat. Această propoziție avea ca aplicație determinarea poziției unui vas pe mare, vizat din două puncte de pe mal;

3) două triunghiuri cu unghiuri respectiv egale au laturile proporționale — propoziție folosită și în scena cu măsurarea piramidei în Egipt.

4) Unghiul înscris care subîntinde un diametru este drept; demonstrația acestei teoreme presupune și cunoașterea sumei unghiurilor unui triunghi, cel puțin în cazul triunghiului dreptunghic.

Pare puțin; din nou, pentru a surprinde importanța acestei opere, trebuie să ținem seama de etapa istorică, de nivelul și calitatea gîndirii în acel moment. Acest rezumat vorbește numai de unele *rezultate*, devenite astăzi banale; printr-o punte de simpatie aruncată peste secolele care ne despart, să căutăm să reconstituim, să intuim *procesul* de gîndire care a condus la aceste descoperiri. Profesorii insistă să ținem minte ceea ce am învățat. Aici dăm sfatul contrar: *să uităm* — desigur, numai pentru cîteva momente — ce știm, să ne punem problema cum s-ar putea înainta în necunoscut, cum a gîndit acel care prima oară a pășit spre aceste adevăruri.

Suma unghiurilor într-un triunghi

Ghicesc reacția cititorului în fața acestui titlu: Iar? Cine nu știe? 180 de grade. Ce s-ar mai putea discuta despre acest subiect?

Subiectul rămîne deschis în două direcții; din punct de vedere matematic și psihologic. În planul pur matematic, chestiunea, în ciuda aparenței ei banalități, a constituit obiectul unor studii foarte atente (axate pe întrebarea: în ce condiții suma unghiurilor triunghiului este egală cu două unghiuri drepte?) și care stau la introducerea într-o geometrie nouă, neeuclidiană, despre care vom vorbi în cap. XI.

Aici, privim chestiunea psihologic și anume nu în etapa de aprofundare a ei, ci în aceea de descoperire.

În primul rînd, să facem efortul de a ne da seama că enunțul însuși nu este banal. Cînd am predat o dată în clasa a șasea această teoremă, am început cu enunțul: în *orice* triunghi, suma unghiurilor este 180°. Un puști vioi, care era obișnuit să privească lucrurile critic și să-și mărturisească sincer îndoielile, s-a arătat pe dată foarte nedumerit. — Iertați-mă, nu-mi vine a crede. Într-un triunghi echilateral, parcă da. Dar dacă e așa? — și el desenă un triunghi ca cel din figura 2*a*; dar la ăsta — și desenă figura 2*b*, privind-o lung și neîncrezător.

Cum a ajuns cineva să se întrebe cît este suma unghiurilor unui triunghi — întrebare care presupune bănuiala că ea este aceeași în toate triunghiurile?

Să privim în jurul nostru sau mai bine în „jurul" vechilor greci. În natură (copaci, stînci, țărmul mării etc.) nu întîlnim forme geometrice; întîlnim astfel de forme printre obiectele construite de om. Cea mai răspîndită, cea mai familiară deci, este desigur dreptunghiul. Nimeni nu s-a îndoit înainte de apariția geometriei că dreptunghiul are 4 unghiuri drepte (noțiunea de unghi drept fiind naturală: o dreaptă care nu e înclinată nici într-o parte nici în cealaltă față de o alta).

Triunghiul este o formă mult mai puțin răspîndită. Tales va fi văzut această formă pe fețele piramidelor din Egipt, pe unele pietre de pavaj ale templelor — va fi văzut mai ales triunghiuri echilaterale sau isoscele.

Triunghiul dreptunghic îi va fi apărut ca o jumătate (formată prin ducerea unei diagonale) dintr-un dreptunghi. Egalitatea celor două triunghiuri astfel formate îi va fi apărut ca de la sine înțeleasă; de vreme ce suma unghiurilor la



Fig. 2

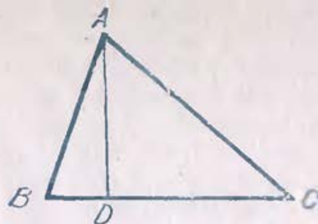


Fig. 3

dreptunghi este de 4 unghiuri drepte, la unul din triunghiurile dreptunghice formate va fi de 2 unghiuri drepte. Invers, fiind dat un triunghi dreptunghic putem să-i alăturăm pe ipotenuză unul egal cu el, astfel ca să se formeze un dreptunghi.

Din faptul că suma unghiurilor la un triunghi *dreptunghic* este 2 unghiuri drepte, se poate deduce propoziția pentru un triunghi oarecare: îi ducem înălțimea (fig. 3). Se formează două triunghiuri dreptunghice și din suma unghiurilor lor (4 u.dr.), trebuie să scădem cele 2 unghiuri din D (2 u.dr.).

Să închidem pentru moment istoria și să deschidem logica, să vedem ce este sau ce trebuie să fie o noțiune geometrică.

Noțiuni

Pronunțați cuvîntul copac, închizînd ochii și fiți atenți ce imagine trezește acest cuvînt. Copacul pe care l-ați „văzut" la *auzul* cuvîntului era mare sau mic? Avea frunze sau nu? Avea scoarța trunchiului albă (ca la mesteacăn) sau cenușie? Avea coroana rotundă (ca la castan) sau conică (în felul celei de brad)? Nu putem răspunde la aceste întrebări; imaginea sugerată de cuvîntul copac nu este precisă, nu are claritatea imaginii pe care o dă *vederea* unui *anumit* copac. Să vedem cum am ajuns să înțelegem ce înseamnă cuvîntul copac, cum s-a format *noțiunea* de copac.

Cînd eram mici și abia învățam a vorbi, ni s-a arătat „ceva“ și ni s-a spus: copacul!; apoi am văzut ceva asemănător căruia i s-a spus tot copac; am văzut un copac vara plin de frunze, am văzut același copac iarna, dezgolit, ceea ce nu ne-a împiedecat să-l numim tot copac. S-au suprapus o serie de imagini — asemănătoare dar diferite — am reținut ce caractere *comune* au diverșii copaci văzuți de noi (de pildă au trunchi și ramuri — nu ținem seama că unul are trunchiul mai gros ca altul) ce caractere *permanente* (în timp) are un același copac (forma generală și poziția în spațiu — nu ținem seama că odată are frunze, alteori nu).

În general, o noțiune se formează prin reținerea caracterelor comune și permanente ale unei mulțimi de elemente (obiecte fizice, acțiuni etc.).

Să observăm că o dată formată, noțiunea se aplică și unor elemente pe care nu le-am cunoscut direct; dacă, de pildă, mergem la ecuator putem exclama „ce copac mare!“. Nu ezităm să-i spunem copac, dar e și un aspect *nou*. Să observăm de asemenea că pot interveni ezitări care arată că, deși noțiunea este clară cît e vorba de elemente obișnuite, devine neprecisă în fața unora neobișnuite; putem vedea o plantă atît de mică încît să ezităm, nu știm dacă îi putem spune copac, sau mai bine copăcel sau poate nu e copac.

Noțiunea este, am putea zice, un cadru în care se pot înscrie diverse obiecte particulare. Cînd profesorul dictează: scrie fracția..., elevul a și tras o liniuță orizontală, așteptînd să i se dicteze numărătorul și numitorul; există un moment cînd pe tablă e numai linia de fracție, în minte numai *noțiunea* de fracție, abia în momentul următor acest cadru este completat, scriindu-se o *anumită* fracție.

Dacă avem o noțiune aplicabilă unei mulțimi de elemente putem delimita cu ajutorul unei proprietăți (sau grup de proprietăți) o *submulțime* a ei. Menținînd ca exemplu noțiunea de copac, proprietatea „are frunze verzi tot timpul anului“ determină o submulțime (*unii* copaci, nu toți, au această proprietate). Obținem o noțiune nouă și îi putem atașa un cuvînt sau o expresie, de pildă „copac mereu verde“. Ca un alt exemplu, dacă avem noțiunea de triunghi, putem indica

o proprietate „două laturi egale" prin care din mulțimea triunghiurilor se formează o submulțime a ei și o noțiune corespunzătoare, aceea de *triunghi isoscel* (denumire care folosește un cuvînt de origină greacă *isoscel*, pentru ceea ce ar fi denumit pe românește „cu laturi egale").

Avem acum noțiuni formate printr-o *definiție*. O definiție are două părți: 1) noțiunea mai generală din care s-a delimitat noțiunea nouă (în exemplele date, noțiunea de copac, noțiunea de triunghi); 2) proprietatea care determină o submulțime (în cazul nostru „are frunze mereu verzi" sau „are 2 laturi egale"). Prima parte se numește *genul* noțiunii, a doua *diferența specifică*.

Definiție. Un triunghi cu 2 laturi egale se numește triunghi isoscel.

Noțiunea definită aici: triunghi isoscel. Genul: triunghi. Diferența specifică: are două laturi egale.

Dacă numim *sferă* mulțimea de obiecte cărora se aplică o noțiune, observăm că sfera noțiunii definite (noțiunea specie) este mai restrînsă decît sfera noțiunii gen (fiind inclusă în ea) pe cînd *conținutul* (proprietățile ei) este mai bogat.

Să analizăm conținutul. Noțiunea specie are:

1. toate proprietățile noțiunii gen;
2. proprietatea (sau grupul de proprietăți) prin care a fost definită și care constituie diferența specifică;
3. proprietăți care se deduc logic din primele două.

De exemplu, triunghiul isoscel are:

1. toate proprietățile unui triunghi oarecare;
2. două laturi egale, proprietate dată prin definiție;
3. proprietăți deduse logic din primele, de pildă proprietatea de a avea două unghiuri egale.

Noțiuni geometrice

Noțiuni născute prin idealizare. Să considerăm noțiunea de dreaptă. Ea își are origina, ca și noțiunea de copac, în realitatea materială, dar procesul de formare a

noţiunii este diferit. Să privim cîteva drepte „reale": una trasă cu creionul pe hîrtie, muchia unui cristal, raza de lumină etc. Dreptele reale au o anumită *grosime* — altfel nu s-ar vedea; ele sînt finite. Dreapta geometrică nu are absolut nici o grosime, ea nu se vede, se imaginează; o dreaptă reală e mai subţire ca alta, o a doua este şi mai subţire, o a treia şi mai... are loc în mintea noastră un fel de proces de trecere la limită: nu o vreau numai mai subţire şi nici numai foarte, foarte subţire, o vreau absolut fără nici o grosime. Nu există — ca realitate materială — aşa ceva, dar poate exista ca realitate imaginată. Spunem că noţiunea de dreaptă se naşte printr-un *proces de idealizare* a realităţii. De ce o vreau fără grosime? În geometria practică se lucrează, în privinţa problemelor geometrice: măsurători, desene la scară etc., cu atît mai exact cu cît dreptele sînt mai subţiri. Aceasta ne împinge spre acţiunea de a subţia dreapta. În geometria teoretică nu se poate lucra decît cu drepte de grosime *nulă*; dacă două puncte ar avea dimensiuni, fie ele şi foarte mici, prin ele s-ar putea duce nu o dreaptă, ci o infinitate, axioma de bază nu ar fi valabilă, lucrurile ar fi atît de complicate încît travaliul gîndirii geometrice nu ar mai avea sens. Aceasta ne împinge ca în acţiunea de a subţia dreapta să mergem pînă la capăt: s-o subţiem complet, pînă la dispariţia grosimii. Ce rost are? De dragul „teoriei", să părăsim realitatea şi să lucrăm cu noţiuni idealizate? Da, de dragul teoriei, dar nu numai de dragul ei. Între aspectele reale şi cele idealizate rămîne o înrudire adîncă. După ce teoria a fost elaborată, putem reveni la practică, teoria i se va aplica cu aproximaţie, cu atît mai exact cu cît realităţile practice vor fi mai „perfecte", mai apropiate de noţiunile idealizate care au făcut obiectul teoriei. Această legătură între teoria unor noţiuni idealizate şi studiul realităţilor directe apare, e utilă, şi în fizica propriu-zisă, nu numai în geometrie. Nu există practic un mobil care să se mişte la infinit rectiliniu şi uniform — această situaţie e numai o trecere la limită a unor situaţii reale — totuşi fără principiul inerţiei nu ar fi posibilă mecanica raţională. Legea lui Boyle-Mariotte se aplică numai gazelor *perfecte*, dar numai puţine din gazele

reale se apropie suficient de mult de starea ideală a unui gaz perfect.

După ce noțiunile născute prin idealizare s-au format și ne situăm în planul teoriei, perspectiva se poate răsturna: realitatea este privită ca o *copie imperfectă* a noțiunilor ideale. Neținînd seama de procesul viu, dialectic, al formării acestor noțiuni, Platon cel dintîi, a considerat perspectiva răsturnată de care vorbeam ca reprezentînd nu o simplă perspectivă, ci o realitate de fond și a construit o teorie filozofică, în care susține că realitatea primordială o constituie „ideile", realitatea pe care o vedem fiind doar o copie a ei. Teoria se numește *idealismul platonician* și a fost reluată și susținută în decursul istoriei de clasele reacționare, care au interes — material, dar ascuns — să mînuiască niște scheme zise „ideale" pentru ascunderea și înăbușirea unor realități palpabile, de fond.

Idealismul a avut însă, cum vom vedea, și o influență *directă* asupra geometriei.

Noțiunile geometrice idealizate: punct, dreaptă, plan; un punct este situat pe o dreaptă sau într-un plan etc. nu sînt date prin definiții. Primii geometri au fost conduși „de la sine" să le folosească și le-au folosit efectiv cu deplină siguranță. Nu a intervenit nici o „problemă" legată de faptul că nu se putea spune explicit în cuvinte ce este o dreaptă. O astfel de problemă, axată pe critica fundamentelor și construcției logice a geometriei va apare mult mai tîrziu (v. cap. XII). În etapa de dezvoltare a geometriei, spiritul și atenția cercetătorilor este îndreptată într-o altă direcție, nu critică ci constructivă: descoperirea proprietăților geometrice.

Spiritul euristic

Să examinăm propoziția: din punctele unui cerc un diametru este văzut sub unghiuri drepte. Astăzi o demonstrăm imediat cu ajutorul măsurii unghiurilor; cum va fi gîndit Tales, care nu cunoștea această teoremă pregătitoare?

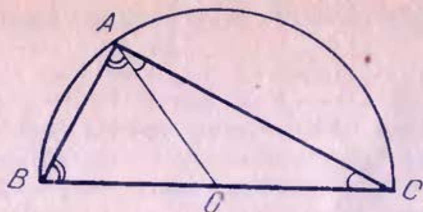


Fig. 4

Deoarece $OA = OB = OC$ (fig. 4), se formează două triunghiuri isoscele. Ele au unghiurile de la bază egale; deci $\hat{A}_1 = B$; $\hat{A}_2 = C$. Suma unghiurilor triunghiului ABC este deci $2A_1 + 2A_2 = 2\widehat{BAC}$; rezultă că $\widehat{BAC}$ este drept.

Proprietatea în sine era destul de ascunsă: din definiția cercului, deci din faptul că $OA = OB = OC$, *se deduce* că unghiul BAC este drept.

Descoperirea unei proprietăți *ascunse* produce o anumită bucurie specific umană. Se spune că Tales a fost atît de entuziasmat de această descoperire — considerată ca cea mai frumoasă dintre descoperirile sale — încît, drept mulțumită, a sacrificat pe altarul zeilor un bou.

Am menționat printre teoremele lui Tales și pe aceea care afirmă că unghiurile de la baza triunghiului isoscel sînt egale. Aceasta — sînt sigur — nu l-a entuziasmat, pentru că nu era o proprietate *ascunsă*, era aproape evidentă. A enunțat-o numai pentru că i-a trebuit, a folosit-o în demonstrația teoremei principale; probabil, pentru ea, nu a sacrificat zeilor nici măcar o gîscă.

Ce este caracteristic geometriei? Faptul că din anumite cunoștințe directe deducem numai prin judecată proprietăți noi, pe care le-am putea numi cunoștințe indirecte. Prin spirit *euristic* (cuvîntul vine de la evrika = a descoperi), înțelegem tocmai această înclinare, această pasiune uneori, de a lărgi mereu sfera cunoștințelor printr-o investigație proprie.

O explicație biologică a unui fenomen psihologic

Spiritul euristic este o trăsătură specifică omului. Alte viețuitoare iau contact cu mediul prin simțuri, iar reacțiile lor față de evenimentele exterioare sînt directe și organice. Specia om s-a născut atunci cînd o ființă a pus în lucru nu numai forțele sale proprii, ci și materialele și energia pe care le-a găsit în afara lui. A lovi pe atacator *cu o piatră*, apoi a ascuți o piatră pentru a lovi mai bine — iată esența începutului speciei, a direcției care duce la om. Îndată ce s-a înclinat pe această direcție, mersul pe ea trebuia să fie progresiv, accentuînd mereu înclinarea de a folosi, în lupta vieții, legile materiei. De ce numai piatră? O creangă îndoită — la început din întîmplare — de către un „om" care fugea, s-a dezdoit brusc și a lovit animalul care îl fugărea ; e o experiență ; fenomenul elasticității crengii a fost util și va fi din ce în ce mai bine utilizat, pînă se va ajunge la construirea arcului. Un lemn plutește pe apă ; agățîndu-te de el, plutești mai ușor ; e o experiență ; fenomenul va fi din ce în ce mai bine folosit, se va ajunge la un lemn scobit, la o barcă, la problema generală a navigației.

Pentru a folosi legile materiei, ele trebuie cunoscute și trebuie făcute, pe baza lor, anumite prevederi, anumite deducții.

Pasiunea pentru a cunoaște este, într-o primă etapă, axată pe interesul pentru utilități practice, de viață. Există o tensiune de ordin biologic spre folosirea materialelor oferite de mediu, apoi spre *construirea* unor instrumente din aceste materiale. Cunoașterea este mijlocul de a le construi.

În timp, apare însă un fenomen psihic foarte interesant: detașarea pasiunii de a cunoaște de legătura strînsă cu interesul practic, în funcție de care ea s-a născut. Întrebările privind cauze și efecte se angrenează în lanț ; efectul unei situații date poate deveni, la rîndu-i, cauză pentru un efect nou, acesta o nouă cauză pentru un alt efect etc. Primul efect poate fi, în sine, inutil ; dar el poate fi cauză pentru un

nou efect și acesta poate fi util. Deoarece nu se știe la care verigă a lanțului de cauze-efecte se ivește folosul practic, cercetarea continuă. Adevărul s-a dovedit de atîtea ori util — fie direct, fie indirect, ca mijloc de a descoperi alte adevăruri direct utile — încît el ajunge interesant și dorit pentru el însuși.

Dragostea pentru adevăr, pasiunea pentru cunoaștere pură apare ca o sublimare a interesului pentru util

Din *homo faber* — omul meșteșugar, omul stăpînit de tensiunea de a fabrica și folosi instrumente utile — se naște printr-un proces dialectic natural *homo sapiens* — omul pasionat de lucrul inteligenței sale.

Evoluția continuă. Cunoștințele sînt de două feluri: 1) directe, obținute prin observații, prin experiență, prin inducție, generalizînd datele observațiilor; 2) indirecte, obținute prin *deducții logice*, din primele. Aceasta nu numai în știință, ci și în multe probleme de viață. De pildă, un detectiv are un cuantum anumit de cunoștințe directe: unde s-a comis crima, cine este victima, anumite urme materiale etc., — un ansamblu de *date*, care în matematică s-ar numi *ipoteza*. Pe baza lor, el face o serie de *raționamente*. Acestea îl conduc la o concluzie — sigură sau probabilă — în legătură cu identitatea criminalului. Cînd datele au fost suficiente și raționamentele bune, s-a obținut o cunoștință *nouă*, implicată de primele dar pentru a cărei scoatere la lumină a fost necesar un travaliu al inteligenței.

Acest proces de a descoperi prin raționament adevăruri noi, implicate de cunoștințe directe este mai pur și mai sigur în fizica-matematică (în problemele de viață condițiile fiind mult mai complexe, concluziile sînt numai probabile). Este știut de pildă că dacă avem ca date un cîmp de forțe, poziția și viteza inițială a unui mobil, putem deduce toată traiectoria și viteza în fiecare moment al mișcării pe care o va face mobilul. Importantă este aici și problema inversă: fiind dat cîmpul

de forțe, ce viteză inițială trebuie să imprimăm mobilului pentru a obține o traiectorie dată — recunoaștem aici schema problemei lansării sateliților; dar și în general, problemele inverse sînt și interesante în sine și, adesea, foarte utile.

Deducția logică are în fizică un rol dublu: în primul rînd a descoperi fenomene noi, pe baza celor cunoscute; în al doilea rînd, un fel de problemă inversă: oare o mulțime de fenomene cunoscute direct, nu pot fi regăsite drept diverse consecințe logice ale unui număr restrîns de principii de bază?

Să revenim acum la problema psihologică. Din omul-tehnician, axat pe interesul pentru utilități practice, s-a născut fizicianul, luînd aici cuvîntul într-un sens larg: omul axat pe pasiunea de a cunoaște legile naturii. Mai departe. Existînd două moduri de a cunoaște, direct și prin raționament, unii oameni se pasionează de al doilea. În sens larg, *matematica este pasiunea de a depăși, prin lucrul inteligenței, cunoașterea directă.*

Matematica — artă

Pasiunea de a avea instrumente utile a născut pasiunea de a ști. A ști înseamnă însă rezultatul unui proces, care poate lua diverse moduri: a afla citind sau învățînd din experiența altora, a afla prin observații proprii; a afla prin *deducții* proprii.

Ce este mai pasionant, rezultatul, *a ști* sau procesul, *a afla?* Răspunsul depinde de multe condiții, îl lăsăm la o parte și înregistrăm constatarea: pentru unii oameni — oameni autentici, plasați pe linia unei dezvoltări naturale a caracteristicilor umane — dominantă devine pasiunea de a afla și anume de a afla numai prin raționament lucruri noi, deduse din lucruri cunoscute. Aceasta este pasiunea *matematică: dezvăluirea implicațiilor ascunse.*

Care este natura fenomenelor pe care se poate exercita această pasiune? Care sînt condițiile de ordin social care o favorizează?

Să ne fixăm atenţia la prima întrebare. Problemele de viaţă sînt prea complexe pentru a deveni probleme de deducţie pură. Problema detectivului, de care pomeneam mai sus, o întîlnim mai mult în cărţi care schematizează fenomenul, îl simplifică artificial pentru ca raţionamentele detectivului să apară ca sigure şi cititorul să fie uimit de perspicacitatea lor. În realitate, în astfel de probleme, raţionamentul are doar un rol parţial, adiacent. Problemele de fizică deductivă sînt sau pot fi probleme de raţionament pur, dar sînt şi ele foarte complexe, necesită eforturi multiple, pe mai multe planuri, şi ca atare nu ar putea constitui un obiect de activitate *curentă* pentru mulţi oameni. Sînt proprii oamenilor excepţionali. Ele necesită şi o laborioasă acumulare de material informativ de bază, necesită şi repetate confruntări cu experienţa, pentru verificarea deducţiilor, pentru rectificarea eventuală a premiselor.

Un alt domeniu avea să se dovedească extrem de fertil, o sursă pură şi inepuizabilă de probleme axate pe pasiunea dezvăluirii implicaţiilor ascunse: geometria. Aici materialul de cunoştinţe directe este minim şi la îndemîna oricui; concluziile nu au nevoie de confruntarea cu experienţa; intervine numai travaliul gîndirii; problemele sînt relativ simple după rezolvarea lor dar şi, adesea, foarte ascunse înainte, astfel încît descoperirea soluţiei este şi posibilă, tentantă, dar şi cu dificultăţi care o fac nesigură, problematică, astfel încît succesul să constituie un eveniment care produce o bucurie şi o emoţie caracteristică.

Problemele sînt relativ simple, spuneam. Da, la început; dar, pe măsură ce sagacitatea rezolvitorului se dezvoltă, pot fi construite probleme din ce în ce mai complexe, pe măsura ei. Complexitate nu de natura celei din problemele vieţii sau ale fizicii, provenită din faptul că obiectul lor este o realitate încărcată de nuanţe şi posibilităţi, ci complexitate pur raţională, provenită din faptul că lanţul raţionamentelor este

mai lung și mai ramificat. Nicăieri ca în geometrie o hrană atît de bogată și atît de pură pentru pasiunea de a dezvălui implicații ascunse, pentru spiritul euristic. Înțelegem ce a gîndit autorul definiției pe care am citat-o în introducere: „...știința unor operații ingenioase, cu concepte și reguli inventate tocmai în acest scop...".

În acest scop? S-a uitat interesul pentru practică? A trecut în umbră dorința de a cunoaște legile naturii? A rămas ca mobil numai plăcerea de a construi un joc de raționamente și de a dezvălui concluziile implicate ascuns de date anume aranjate — indiferent de *valoarea* acestor concluzii?

În Tales, legătura cu practica este încă vizibilă. Vom trece de îndată la Pitagora care nu numai că nu se preocupă de ea, dar o și desconsideră.

Ce sens mai are atunci geometria? Este geometria greacă o știință propriu-zisă?

„...E necesar de deosebit a patra fază în care construcția artificială părăsește scopul util și plăsmuiește opere care nu interesează decît prin semnificația lor — spune filozoful român Mihai Ralea, vorbind despre artă. Și el continuă: „Cînd asemenea opere se pot produce, arta apare. (...) Arta e oarecum o tehnică ce și-a uitat scopul (...). Arta e triumful mijlocului și neglijarea scopului".

Dacă este așa, putem spune că *geometria greacă este o artă*; de la geometria-meșteșug a egiptenilor s-a trecut, după aceeași dinamică din artele propriu-zise, la o operă în care „s-a uitat scopul" și care „nu interesează decît prin semnificația ei".

Dar arta nu înseamnă o simplă inutilitate, ci o utilitate de alt ordin: un alt mod de cunoaștere. În geometria-artă, legătura cu problema majoră a cunoașterii, chiar dacă provizoriu ascunsă celor care o fac, rămîne reală, organică. Istoria va dovedi din plin aceasta. Mai mult: va dovedi că aparenta îndepărtare de probleme practice va crea, în timp, un instrument pentru a le trata mai în adînc, într-o perspectivă mai largă — mai *eficient*.

Să revenim la două chestiuni anterioare:

1. Proprietățile geometrice sînt a) cele date prin definiții; b) cele implicate de ele, care trebuie descoperite și demonstrate, pe baza teoremelor anterioare și a condițiilor din definiții.

Rezultă că în geometria propriu-zisă, o definiție nu trebuie să conțină decît minimum de condiții pentru a delimita noțiunea; nu includem în definiție proprietăți care pot fi deduse din altele.

Exemplu. La întrebarea ce este un paralelogram, un elev (desigur, nu cititorul nostru, ci unul mic) răspunde: patrulaterul care are laturile opuse două cîte două paralele *și egale*. Nu e bine, răspunde profesorul. Iar elevul rămîne nedumerit. Cum, nu e bine? Nu-i adevărat că paralelogramul are laturile opuse paralele și egale? E adevărat; dar cum să-i explicăm că aici nu e vorba dacă e adevărat sau nu, ci e vorba: ce fel de adevăr e. Dacă știu că laturile sînt paralele — aceasta e suficient pentru ca patrulaterul construit cu respectarea acestei condiții să fie paralelogram; atîta trebuie să intre în definiție. Faptul că laturile opuse sînt *și egale* este adevărat, dar el nu trebuie enunțat în definiție, el este o consecință a definiției, el poate fi și trebuie demonstrat pe baza teoremelor anterioare și a condițiilor din definiție.

Esența geometriei stă tocmai în faptul că definițiile sînt foarte sărace, iar proprietățile deduse foarte bogate. Cîte și cîte se mai pot spune despre paralelogram! Cu atît mai mult despre paralelograme în care se mai fac și alte construcții (diagonalele, bisectoarele, dreptele care unesc vîrfurile cu mijloacele laturilor etc.). În alte domenii, proprietățile noțiunilor sînt, cele mai multe, independente una de alta; din faptul că bradul este un copac care își păstrează și iarna frunzele nu se pot deduce alte proprietăți ale lui: că frunzele sînt ca niște ace, că lemnul lui e mai puțin dens ca al stejarului, că îi priește mai mult muntele decît șesul etc. Ca să-l cunoaștem complet trebuie să-l *descriem*, să enumerăm cît mai multe proprietăți pe care le constatăm direct. Ar

fi frumoasă, dacă ar fi posibilă, o biologie deductivă; ea nu poate fi însă decît parțial deductivă — să ne amintim de pildă felul cum Cuvier *deducea* din forma unui craniu-fosilă, forma animalului și modul lui de hrană etc. — și, în orice caz, este vorba de deducții cu alt specific decît acelea din geometrie.

2. Să revenim acum la felul cum a stabilit Tales suma unghiurilor într-un triunghi. Spiritul lui era îndreptat, cum am mai spus, spre descoperirea proprietăților și îl atrăgeau desigur mai mult cele ascunse ne la îndemîna oricui, deci cele *deduse*. Dar e foarte probabil că el nu dădea atenție definițiilor — noțiunile fiind simple și putînd fi gîndite fără explicații — și deci nu făcea distincția, de care am vorbit mai sus, între proprietăți date prin definiție și cele deduse.

Ce este dreptunghiul — pentru Tales, pentru un copil din clasa patra din zilele noastre? Această noțiune se formează prima dată după tipicul exemplificat pe noțiunea copac. Vedem în jurul nostru — și desigur vedea și Tales — diverse dreptunghiuri reale (ca formă a fețelor unor obiecte); unele sînt mai mici, altele mari — deci mărimea nu va intra ca o notă a noțiunii; unele avînd lungimea mult mai mare decît lățimea, altele cu puțin (sau de loc) mai mare — deci raportul între dimensiuni nu constituie o notă a noțiunii. Ce este *comun* tuturor dreptunghiurilor reale? Faptul că oricare din ele are 4 laturi două cîte două egale și paralele, faptul că are 4 unghiuri drepte. Un copil care vrea să arate că știe ce este dreptunghiul va enumera toate aceste proprietăți, va da o *descriere* a noțiunii și nu o definiție matematică. Considerînd dreptunghiul cu proprietățile lui — ca o realitate dată — Tales caută ca pe baza lor să deducă proprietățile altor figuri.

O construcție logică a noțiunii, a demonstrării proprietăților, chiar dacă par „evidente" va veni peste 3 secole, iar punerea sub semnul dubiului a însăși existenței dreptunghiului, mult mai tîrziu, abia în secolul al XIX-lea.

Tales era pătruns de spirit euristic și el, primul, a intuit marea fertilitate a cercetărilor geometrice.

Cheia fertilității: criteriile de egalitate și de asemănare

Un triunghi are 3 laturi și 3 unghiuri; dar mărimile lor nu sînt independente; cunoscînd trei din aceste elemente (printre care cel puțin o latură), celelalte sînt *determinate*. De aici derivă și cunoscutele criterii de egalitate; știm de pildă că $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$; *rezultă de aici* că și $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Știm inițial 3 lucruri, deducem cu ajutorul criteriului alte 3 lucruri implicate de primele. Ca să ne dăm seama că aici este una din cheile fertilității, să ne gîndim în cît de multe probleme aplicăm metoda triunghiurilor egale: să ne gîndim că o folosim uneori și indirect: folosim de pildă proprietățile paralelogramului, dar faptul că laturile opuse ale paralelogramului sînt egale — ca și teoreme reciproce — au fost stabilite tot pe baza criteriilor de egalitate a triunghiurilor.

Reflecții analoge în legătură cu asemănarea: două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt asemenea dacă $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ — în totul *cinci* condiții (cîte semne $=$ avem). Dar prin criteriile de asemănare, dacă două din ele (nu oricare două) sînt îndeplinite, celelalte rezultă. Din nou, o metodă fertilă: să ne amintim de pildă că toate relațiile metrice se stabilesc cu ajutorul asemănării.

În lista lucrărilor lui Tales se află primul criteriu de egalitate, primul criteriu de asemănare. A descoperit deci cheia. Și chiar dacă nu a deschis cu ea toate lacătele care păzeau comorile geometriei, a predat-o urmașilor, care au folosit-o cu prisosință.

Înțelegem azi cu ușurință teorema — poate cea mai frecvent citată din toate teoremele din lume — care-i poartă numele. Înțelegem mult mai greu — să reconstituim exact este imposibil — condițiile, climatul, atmosfera încărcată de vaporii întunecoși și solemni ai filozofiei mistice, pe fondul cărora s-au detașat, luminoase, creațiile matematice ale acestei școli.

Deși este contemporan cu Tales — Pitagora a trăit între 569—500 î.e.n. — ce mentalități diferite la cei doi mari ctitori ai geometriei! Unele preocupări — ca obiect — de același gen, ba chiar într-un caz identice, căci și Pitagora descoperă teorema despre suma unghiurilor în triunghi. Dar interpretarea și perspectiva lor filozofică, dar rezonanța afectivă în planuri complet diferite; Tales este cu picioarele pe pămînt — și la figurat dar și la propriu, de vreme ce înfige un băț în pămînt, determină poziția unei corăbii vizînd-o de pe mal — Pitagora plutește într-un fel de stratosferă a armoniilor pure, transcendente.

Școală-Academie — „mînăstire" — asociație secretă

Pitagora s-a născut la Samos. A studiat cu Anaximandru — elevul lui Tales — a călătorit și studiat în Egipt și în Asia mică — nu cunoaștem însă detalii asupra tinereții lui. La 40 de ani, înființează la Crotona, în sudul Italiei, școala pitagoriciană. Ne-am ferit să spunem „o școală", adică să folosim un substantiv comun și articolul nehotărît. Școala lui Pitagora este o realitate unică, despre care nu ne putem face o idee decît printr-o descriere.

Este vorba de o școală în sensul că se fac expuneri, poate chiar un fel de lecții — de matematică și filozofie — urmă-

rite cu mult interes, cu entuziasm, de un public numeros și divers format din cetățeni de toate categoriile, printre care și femei! — semn de mirare căci în acea vreme femeile nu au voie să pătrundă în reuniuni publice, deci prezența lor arată fascinația acestor cursuri.

Acesta este însă numai un aspect al școlii lui Pitagora — cel public. Școala propriu-zisă nu este „o școală", ci, mai curînd, o academie. În școala propriu-zisă nu este admis publicul, ci numai membrii școlii și acolo nu există relația „profesor-elev" sau „conferențiar-public"; este vorba de cercetări, discuții, lucrări ale inteligenței, în comun, deci aici, sub acest aspect, termenul mai potrivit ar fi acel de academie (în sensul de astăzi).

Această academie are însă o organizare cu totul diferită de aceea de astăzi, asemănătoare într-o oarecare măsură cu o mînăstire. Pentru a deveni membru titular al școlii — care se numea *matematician* și însemna cu mult mai mult decît un *auditor* al cursurilor publice — era nevoie de un stagiu de *inițiere* și de îndeplinirea unui complex de condiții, care se refereau nu numai la „pregătirea" filozofică sau matematică, ci și la concepția de viață și la modul de viață. Admiterea se făcea printr-o solemnitate specială, în cadrul căreia neofitul presta un jurămînt constînd atît dintr-o profesie de credință, cît și dintr-un angajament asupra respectării regulilor asociației.

Membrii asociației trebuiau să aibă și să mărturisească același „crez" filozofic, aceeași concepție. Ei trebuiau să respecte și o serie de reguli — foarte stricte — de viață. Averea tuturor era pusă la dispoziția asociației și folosită în comun. Hrana era simplă, disciplina severă, viața foarte ordonată, după niște canoane riguroase. Trebuiau să se scoale înainte de ivirea zorilor și ziua de lucru începea prin recapitularea a ceea ce s-a făcut în ziua precedentă și trasarea unui „plan de lucru" pentru ziua ce începea; seara, se făcea confruntarea planului cu realizările.

Acest mod de viață (bunuri în comun, hrană simplă, sculatul la ore fixe etc.) permit o oarecare analogie cu ceea ce va fi mai tîrziu viața într-o mînăstire creștină, deosebirea stînd

în conținut: nu credință și texte sfinte, ci știință, cugetare activă. Dar analogia poate fi împinsă mai departe; școala lui Pitagora nu profesa numai teorii de ordin științific și filozofic, ci și învățăminte de ordin *moral*: se urmărea formarea unor trăsături de caracter, ca: stăpînirea de sine și sîngele rece, cumpătarea, altruismul etc.

Școală-academie-mînăstire, această apropiere între noțiuni astăzi atît de diferite nu acoperă totuși în întregime această noțiune singulară numită școala pitagoriciană. Trebuie adăugat că ea era și o asociație *politică* și anume, nu un partid politic care activează pe față, ci o asociație *secretă*. Care avea și o doctrină teoretică, dar și o putere politică în fapt. Reprezentînd interesele de clasă ale aristocrației, profesa, ca doctrină, teza că în cetate, în stat, conducerea, puterea trebuie să aparțină celor mai „capabili" cetățeni, care trebuie să mînuiască pedepsele așa fel încît să obțină supunere și ascultare oarbă din partea celor mulți. Teză în formă și numai în prima ei parte justă, dacă termenul „capabil" ar fi înțeles cum trebuie: teză, în fond, reacționară și injustă, dacă prin „capabil" se înțelege omul care, datorită apartenenței la clasa privilegiată, își însușește și o anumită cultură, ceea ce îl face să se considere „superior" prin naștere și să creadă că are „drepturi" să pedepsească pe alții cînd nu i se supun orbește.

Caracterul *secret* al asociației vine tocmai din concepția că e vorba de o mînă de oameni aleși, a căror activitate trebuie ferită de participarea și chiar de simpla vedere din partea vulgului.

În anul 501 î.e.n. are loc o revoltă populară care își extinde acțiunea și asupra acestei asociații politice. Mulți membri ai școalei sînt omorîți, Pitagora se refugiază la Tarent, unde numai după un an fu și el omorît tot în vîltoarea unei revoluții.

Asociația continuă să existe încă circa 150 de ani, renunțînd se pare la activitatea politică, axîndu-se pe cercetările matematico-filozofice.

Secretul continuă să fie păstrat cu străşnicie. Astfel, în 470 î.e.n., un membru al școlii, Hippasus, este pedepsit cu

moartea prin înnecare, pentru că trădîndu-şi jurămîntul făcut la iniţiere, dezvăluie în public o descoperire a şcolii în legătură cu poliedrele regulate şi mai mult: prezintă dodecaedrul regulat ca descoperirea sa proprie, cînd toate descoperirile trebuie atribuite numai colectivului, iar toată gloria, fondatorului şcolii, Pitagora...

Abia mai tîrziu legea secretului se atenuează şi, în fine, în anul 370 î.e.n. apare o lucrare (a lui Philolaus) în care se arată descoperirile făcute şi doctrina filozofică a şcolii. O copie a ei ajunge şi în mîna lui Platon, iar centrul de greutate al culturii revine cetăţii Atena.

Matematica — lumea armoniei şi ideilor perfecte

Priviţi figura 5. Ce reprezintă ea? Un pentagon stelat; s-a împărţit cercul în 5 părţi egale şi s-au unit punctele de diviziune din 2 în 2. Cu aceasta noi am spus totul. Oricît am mai privi figura nu ne vom gîndi decît la o serie de caractere geometrice legate de ea (calculul laturii în funcţie de rază etc.) sau, eventual, la un joc de atenţie (dacă unim vîrfurile, cîte triunghiuri sînt pe figură? Distingeţi 35?). În fond, un pentagon stelat şi atît.

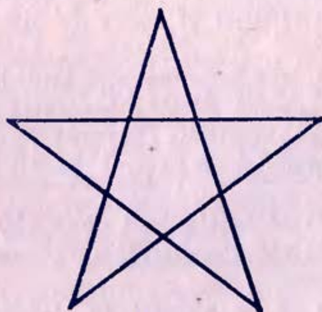


Fig. 5

Pentru pitagoricieni această figură are și atribute misterioase; ea insuflă un sentiment pentru noi cei de astăzi imposibil de intuit sau, cu atît mai puțin, de descris. Vedem și noi o anumită regularitate, o anumită „armonie de linii"; pentru ei, se reflectă aici un fel de „perfecțiune divină", în fața figurii ei au un fel de *contemplare*, de adorație, am zice, religioasă.

Pentagonul este și emblema asociației, semnul de recunoaștere între membrii ei. Întrucît asociația are „filiale" în alte cetăți, din jur, nu toți membrii se cunosc între ei. Dar e suficient ca doi din ei, care se întîlnesc întîmplător, să-și recunoască insigna, pentru a se simți dintr-odată apropiați, solidari. Un istoric antic povestește, în această privință, o istorioară semnificativă. Un drumeț poposește la un han, unde se îmbolnăvește; deși nu are bani asupra lui, hangiul continuă să-l găzduiască, să-l îngrijească. Totuși, după un timp, boala se înrăutățește. Bolnavul, simțind că i se apropie sfîrșitul, desenează pe o placă pentagonul și cere hangiului s-o atîrne la loc vizibil, spunîndu-i că prin ea își va obține plata. Acesta nu înțelege în ce fel, totuși îi respectă dorința. Și, în adevăr, după ce mulți călători au privit-o fără s-o-nțeleagă, într-o bună zi, cineva se oprește cu atenție în fața ei, întreabă pe hangiu cum a ajuns desenul acolo și acesta îi spune toată povestea. Fu de îndată răsplătit din plin pentru cheltuiala și fapta sa bună — spre mirarea lui — de către un om care nu-l cunoscuse personal pe drumețul bolnav de altădată!

Poliedrele regulate

Mare eveniment a constituit în școala lui Pitagora descoperirea celor 5 poliedre regulate. Cel mai frumos taur al comunității fu sacrificat zeilor în onoarea lor.

Există oricîte poligoane regulate. Există însă numai cinci poliedre regulate — corpuri mărginite de fețe plane în formă

Fig. 6

de poligoane regulate egale — care pot fi înscrise într-o sferă. Acestea sînt tetraedrul, exaedrul (cubul), octaedrul, dodecaedrul (cu 12 fețe pentagonale), icosaedrul (cu 20 de fețe triunghiulare). Le vedem în figura 6 (care arată numai partea lor „din față"). Sînt frumoase. Mai ales dacă ar fi construite din cristal (există, cum știm, și cristale naturale care iau astfel de forme) și le-am avea în față, am fi și noi înclinați să le „admirăm", să surprindem regularitatea lor; dar pentru noi impulsul principal merge în direcția *explicării:* de ce numai cinci, cum am putea demonstra că nu există și altele?

Să facem o mică paranteză pentru a da această explicație. Într-un vîrf al poliedrului se întîlnesc cel puțin 3 poligoane. Să începem cu pentagonul, punîndu-ne problema de *a construi* un poliedru cu fețe pentagonale. Decupăm din carton 2 pentagoane ca în figura 7. Unghiul pentagonului fiind 108°, între cele două pentagoane rămîne un unghi de $360 - 2 \cdot 108 = 144°$, deci mai mare de 108°. Rotind pen-

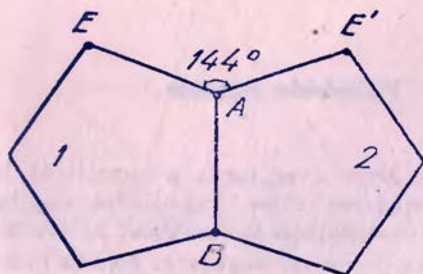


Fig. 7

tagonul în jurul lui AB, unghiul EAE' se micşorează, deci îl vom aduce într-o poziţie în care să aibă 108°. Aceasta înseamnă că alături se va putea aşeza încă un pentagon şi în A se vor întîlni vîrfurile a 3 pentagoane. Procedînd analog pe celelalte laturi ale pentagonului 1, obţinem o cutie avînd la fund pentagonul 1 şi pe de lături 5 pentagoane. E uşor de arătat că ea poate fi înscrisă într-o sferă. Rămîne de demonstrat că luînd simetricele vîrfurilor faţă de centrul sferei, obţinem o cutie analogă care, împreună cu prima, completează dodecaedrul (nu vom da aici demonstraţia, care e mai lungă, deşi, în esenţă, simplă).

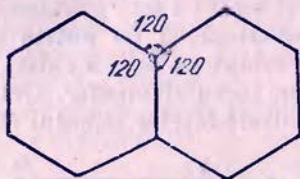


Fig. 8

Să vedem ce poligoane mai putem folosi în astfel de construcţii, pentru a ne da seama că nu pot fi mai multe poliedre decît cele 5 menţionate. Să facem o figură (fig. 8) analogă cu figura 7, în care să luăm un exagon, un eptagon sau un octagon. Unghiul eptagonului, octogonului etc., fiind mai mare ca 120°, între cele două rămîne un unghi mai mic, în care nu mai poate fi aşezat un al treilea. La exagoane rămîn exact 120°, putem aşeza al treilea exagon — deci putem *pava* planul cu exagoane — dar nu mai rămîne loc pentru a roti şi a ieşi în spaţiu. Deci nu sînt posibile poliedre cu feţe poligoane cu mai mult de 5 laturi; rămîne de examinat $n = 5, 4, 3$. Despre $n = 5$ am vorbit; despre $n = 4$, se poate proceda analog şi obţinem cubul. Fie $n = 3$ (feţe triunghiulare). Putem face ca într-un vîrf (fig. 9) să se întîlnească a) 3 feţe, ceea ce dă tetraedrul; b) 4 feţe, ceea ce dă octaedrul; c) 5 feţe ceea ce dă icosaedrul. Nu putem avea 6 feţe sau mai multe, pentru că 6 unghiuri de cîte 60° acoperă exact planul.

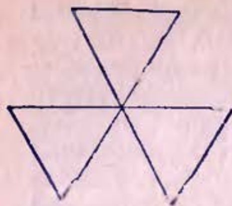
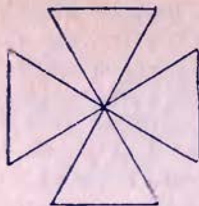
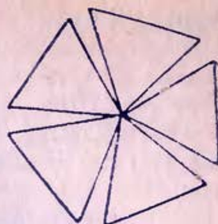




Fig. 9

Putem avea deci cel mult 3 poliedre cu fețe triunghiulare, unul cu fețe patrate și unul cu fețe pentagonale, în total cel mult cinci. Am demonstrat că nu putem avea mai multe de cinci. Rămîne de arătat că cele 5 există efectiv. Pentru tetraedru și cub, e un lucru elementar. Octaedrul îl putem obține dacă unim centrele fețelor cubului (fig. 10). Analog,

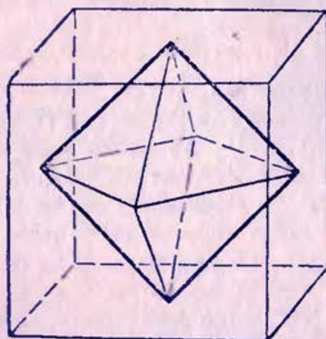


Fig. 10

dacă am demonstrat existența dodecaedrului, unind centrele fețelor lui, obținem icosaedrul. Într-un vîrf al dodecaedrului se întîlnesc 3 fețe; unind centrele lor, obținem un triunghi, dodecaedrul are 20 de vîrfuri, cărora le corespund 20 de fețe triunghiulare ale icosaedrului; unei fețe a dodecaedrului îi

corespunde un vîrf al icosaedrului care va avea deci 12 vîrfuri. Această reciprocitate există și între exaedru și octaedru: 6 fețe, 8 vîrfuri la primul cărora le corespunde 6 vîrfuri, 8 fețe la al doilea.

Să trecem acum de la aspectul matematic la cel psihologic. Sentimentul pe care îl aveam în fața enunțului teoremei se schimbă după ce cunoaștem demonstrația — chiar dacă numai în schiță, ca idee. În fața enunțului pur, înțelegem ce înseamnă „armonia" pitagoriciană, un anumit „mister" pe care ea îl insuflă. Constatăm însă că demonstrația teoremei aduce o *explicație* care dizolvă acest mister. De unde la început, am fi exclamat: cinci! Numai cinci!, după demonstrație, semnul mirării dispare și e înlocuit cu: sigur, e normal să fie un număr limitat de poliedre regulate, de vreme ce cu exagoane, eptagoane etc. ele nu se pot construi — și nu avem decît să numărăm posibilitățile rămase.

Deși pitagoricienii dau demonstrația enunțului, se pare că pentru ei sentimentul misterului rămîne viu, răscolitor. E din cauză că el este întreținut de considerații din afara geometriei, de concepția filozofică idealistă, mereu împletită intim la ei cu cercetarea matematică.

Psihologia actuală recunoaște ca un fapt real existența unui simț al simetriei, al simplității, al frumuseții, al eleganței unui enunț, unei demonstrații, care constituie unul din mobilurile activității matematice.

Nu recunoaște însă ca un fapt pozitiv absolutizarea acestui aspect, *limitarea* activității matematice la el — dezvoltarea ulterioară va arăta cît de variate sînt problemele care preocupă; mai ales, nu recunoaște interpretările idealiste legate de acest aspect și care, la un nivel profund, își găsesc explicații separate, de ordin social.

Ținînd seama de aceasta, istoria matematicii recunoaște că școala lui Pitagora a adus contribuții însemnate la progresul geometriei, dar concepția ei filozofică a perturbat într-o oarecare măsură, cît i-a fost posibil în lupta cu concepțiile juste asupra științei, acest progres.

Fiind dat un triunghi cu un unghi drept, aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor celor două patrate construite pe catete.

Pe scurt, noi spunem azi din $\hat{A} = 90°$ rezultă $a^2 = b^2 + c^2$ şi reciproc.

Întrucît grecii nu erau familiarizaţi cu calculul algebric, ei văd în a^2 nu atît un număr-măsură ridicat la patrat, ci o arie. De altfel, şi demonstraţia dată tot cu ajutorul ariilor, ne trimite la enunţul în prima formă.

Pentru a vedea importanţa enunţului, să-i dăm o interpretare modernă. Fie M, mulţimea triunghiurilor în care un unghi este drept; fie M' mulţimea triunghiurilor în care patratul unei laturi = suma patratelor celorlalte două. Cele două mulţimi au fost definite în moduri diferite; măsurări de unghiuri pentru prima, măsurări de laturi şi un anumit calcul pentru a doua. În acest moment, nu ştim dacă ele au elemente comune, cu atît mai puţin dacă nu cumva este vorba de aceeaşi mulţime.

Să presupunem că demonstrăm teorema directă. Enunţul ei poate fi interpretat astfel: orice element al lui M (orice triunghi dreptunghic) este şi în M' (are proprietatea $a^2 = b^2 + c^2$), pe scurt $M \subset M'$. Acum ştim mai mult despre cele două mulţimi, dar nu ştim totul. $M \subset M'$, da; dar M' pe lîngă elementele lui M mai are oare şi altele?

Să presupunem acum că demonstrăm reciproca (din $a^2 = b^2 + c^2$ rezultă $\hat{A} = 90°$). Aceasta se interpretează astfel: orice element din M' este şi în M, pe scurt: $M' \subset M$. Deci, M' nu are şi elemente care să nu fie în M. Rezultă $M = M'$.

La aceeaşi concluzie ajungem dacă, în loc de reciprocă, demonstrăm contrara (dacă $\hat{A}$ *nu* este $90°$, a^2 *nu* este egal cu $b^2 + c^2$; deci $a^2 = b^2 + c^2$ *numai* dacă $\hat{A} = 90°$).

$M = M'$. Două mulțimi egale; egale înseamnă aici *identice*, cu exact aceleași elemente; în fond este vorba de o singură mulțime. De ce am notat-o și cu M și cu M' pentru a pune apoi semnul egal? Pentru că inițial nu știam că este vorba de aceeași mulțime, pentru că definițiile celor două mulțimi au fost în mod vădit diferite și numai o investigație specială, demonstrarea celor două teoreme, ne-a dat posibilitatea să scriem $M = M'$.

Aici este un aspect important al gîndirii matematice. Cînd este vorba de mulțimi de obiecte fizice, noțiunea de egalitate a mulțimilor nici nu are rost. O mulțime egală cu mulțimea cărților din dulapul meu? Nu există decît ea însăși. Dacă X are același număr de cărți ca și mine sau chiar dacă are în biblioteca sa exact aceleași titluri, este vorba de alte exemplare, deci nu de mulțimi egale. În matematică, noțiunea de egalitate a două mulțimi are un rost major, pentru că aici cele două mulțimi pot fi definite inițial în moduri diferite.

Cu cît cele două moduri au fost mai diferite, cu atît egalitatea $M = M'$ este mai interesantă, mai surprinzătoare, mai emoționantă, și surprinderea ei, demonstrația, mai pasionantă.

Teorema lui Pitagora intră în această categorie. Nu este banală. Ea face o apropiere între moduri diferite de a privi triunghiurile — prin unghiuri, prin laturi — și, prin aceasta, oferă un interes deosebit.

Am vorbit în paragrafele precedente despre noțiunile matematice, despre necesitatea de a distinge între proprietățile date prin definiție și cele deduse. Egalitatea mulțimilor ne dă prilejul să aducem o precizare. O figură poate avea mai multe proprietăți. Cînd am găsit o proprietate, se pune problema: aparține ea *numai* figurii considerate sau și altora? În primul caz proprietatea se zice *caracteristică*. Un triunghi dreptunghic ABC, $\hat{A} = 90°$ are proprietatea $a^2 = b^2 + c^2$. Aceasta ne-o spune teorema directă. *Numai* triunghiul dreptunghic are această proprietate? Da; aceasta ne-o spune teorema reciprocă. Abia după demonstrarea

acesteia putem spune proprietatea $a^2 = b^2 + c^2$ este caracteristică pentru triunghiul dreptunghic.

O proprietate caracteristică (numai una de acest fel) poate *înlocui* definiția inițială, poate conduce la două mulțimi (egale) definite în moduri diferite.

Sute de demonstrații pentru teorema lui Pitagora

Se bănuiește că demonstrația dată de școala lui Pitagora este aceea din figura 11 (patratul construit pe ipotenuza EF, desenat îngroșat, are aria lui $ABCD$ din care se scot 4 triunghiuri egale cu AEF. Cele două patrate avînd laturile EK, respectiv HK, egale cu catetele, au suma ariilor tot aria lui $ABCD$ din care se scot tot 4 triunghiuri — formînd cele 2 dreptunghiuri).

S-au dat acestei teoreme peste 500 de demonstrații, cele mai multe în jurul anului 1900, cînd exercițiile de geometrie

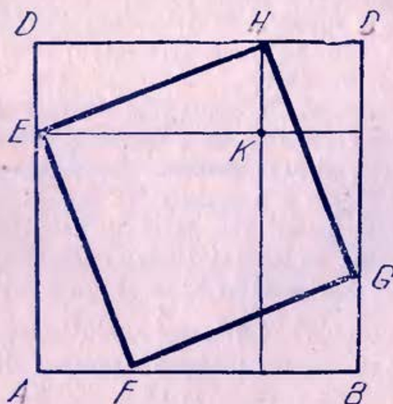


Fig. 11

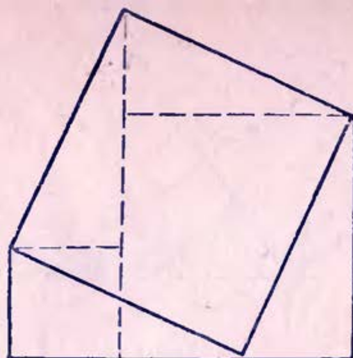


Fig. 12

pasionau ca un joc, dar și în decursul istoriei. De pildă, una din ele este a lui Bhascara, matematician din India, secolul al XII-lea.

Să reproducem, de curiozitate, cîteva. Figura 12; distingem pe figură 4 triunghiuri dreptunghice egale. Dacă din pentagonul format scoatem cele două triunghiuri de jos, rămîne patratul construit pe ipotenuză; dacă le scoatem pe cele două de sus, rămîn cele două patrate de pe catete.

Iată acum o demonstrație care stabilește totodată și teorema catetei. Ea se bazează pe faptul că dacă un vîrf al unui triunghi se deplasează paralel cu baza, înălțimea, deci și aria lui, rămîne aceeași. În figura 13, triunghiurile ABB', B_1BC sînt egale (o rotație de $90°$ în jurul lui B le suprapune). Dacă mutăm pe A în D, vedem că aria primului este egală cu a triunghiului DBB', jumătate din dreptunghiul $BDD'B'$. Dacă pe C îl aducem în A al doilea triunghi este echivalent cu ABB_1, jumătate din patratul de pe catetă. Trecînd de la jumătăți la întregi, găsim că aria patratului construit pe cateta AB este egală cu a dreptunghiului avînd o latură egală cu ipotenuza și cealaltă egală cu proiecția catetei pe ipotenuză. Am obținut astfel teorema catetei. O aplicăm și pentru a doua catetă: acum patratul de pe ipotenuză apare ca format din două dreptunghiuri echivalente, respectiv cu

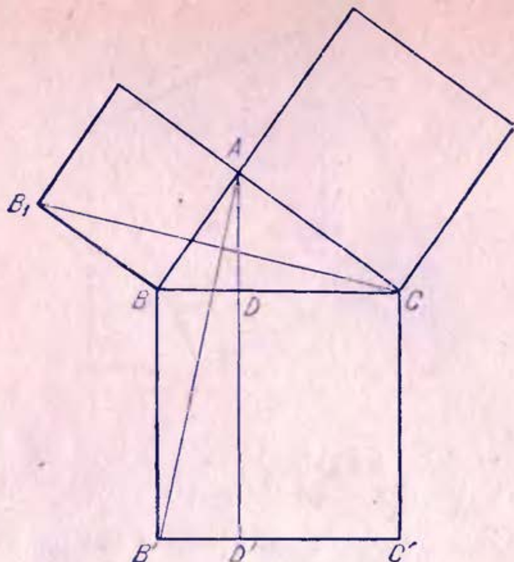


Fig. 13

patratele de pe catete — ceea ce demonstrează teorema lui Pitagora.

Dacă știm că ariile a două triunghiuri asemenea sînt proporționale cu patratele laturilor omoloage, e suficient să constatăm că prin ducerea înălțimii AD (fig. 14) s-au format 3 triunghiuri asemenea, de unde:

$$\frac{A_{(ABC)}}{a^2} = \frac{A_{ADC}}{b^2} = \frac{A_{ADB}}{c^2} = \frac{A_{ADC} + A_{ADB}}{b^2 + c^2} = \frac{A_{ABC}}{b^2 + c^2}$$

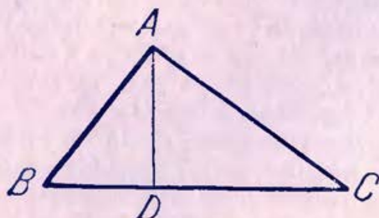


Fig. 14

Fig. 15

Primul și ultimul raport dau $a^2 = b^2 + c^2$.

O teoremă mai generală, datorită lui Pappus (sec. al IV-lea), obținem dacă unui triunghi oarecare ABC îi dăm o mișcare de translație (fig. 15) pînă în $A'B'C'$. Dacă din pentagonul $A'B'BCC'$ scoatem triunghiul $A'B'C'$ rămîne paralelogramul construit pe BC; dacă scoatem triunghiul ABC (egal cu $A'B'C'$) rămîn cele două paralelograme construite pe laturile AB, AC. Rezultă: paralelogramul construit pe BC este echivalent cu suma paralelogramelor construite prin aceeași translație pe celelalte două laturi.

Dacă triunghiul este dreptunghic, iar vectorul de translație AA' este perpendicular pe ipotenuza BC și egal cu ea, obținem figura 16 (unde paralelogramul de pe BC, acum pătrat, a fost construit, pentru claritate, în jos). E ușor de arătat că paralelogramele de pe catete sînt echivalente cu pătratele de pe catete (făcînd să alunece una din laturi pe suportul ei).

Ne oprim aici cu exemplele. Sînt mult prea multe demonstrații pentru a le putea enumera pe toate.

De ce atît de multe?

Unii interpretează matematica astfel: enunțul teoremelor constituie adevărul, demonstrația constituie stabilirea și calea de convingere asupra acestui adevăr — așa cum în fizică pentru o lege avem o experiență care o demonstrează.

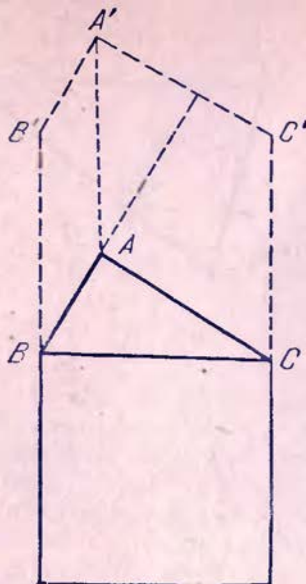


Fig. 16

Este o interpretare justă, dar incompletă. În matematică nu se urmărește numai adevărul în sine; adesea, pe primul plan trece problema de a găsi calea de demonstrație. Esența activității este, din punct de vedere psihologic, *atracția pentru problematic* și — am mai spus-o — uneori se inventează probleme numai pentru a da hrană pasiunii de a rezolva probleme. Unele probleme se axează pe descoperirea unui enunț; altele pe descoperirea demonstrației; în fine, altele pe descoperirea unei demonstrații *noi*, pentru un enunț deja cunoscut și deja demonstrat. Dacă scopul ar fi numai cunoașterea enunțului și stabilirea lui, o demonstrație ar fi suficientă. Dar scopul este... să mai avem ceva de rezolvat. Unele teoreme se pretează la mai multe demonstrații, altele nu.

Importanța majoră a teoremei lui Pitagora

La nivelul liceului rămînem cu impresia că teorema lui Pitagora este importantă pentru că se aplică în multe probleme — în special din acelea care se dau la examene.

În geometria diferențială a suprafețelor, ea ia o formă nouă, care constituie cheia principală a acestei teorii.

Caracterizarea școlii Pitagora în geometrie

Pitagora își face un punct de onoare din a ignora — mai mult: din a desconsidera — legătura cu practica. Aceasta, ca atitudine *conștientă*; pentru că, fără ca această legătură să fie țintită în mod explicit, prin chiar natura gîndirii umane, ea persistă adesea, neștiut și poate apare la suprafață într-un alt moment al cercetării, uneori *pe neașteptate*. Defectul acestei concepții stă în limitarea atenției la problemele care oferă o „armonie interioară". Reversul, pozitiv, al acestui defect stă în eliminarea apelului la intuiție și experiență, în axarea cercetării pe *raționamentul deductiv*, ceea ce necesită și o mai mare grijă în enunțarea definițiilor, în distingerea proprietăților date prin definiție de acelea deduse din ele.

Mistica numărului natural

Și în aritmetică, pitagoricienii se gîndesc mai mult la proprietăți, „armonioase" și „misterioase", ale numerelor și de loc la aplicațiile lor practice. Socotelile

constituie treaba oamenilor care muncesc și nu a filozofilor. De altfel, tocmai pentru că nu gîndesc la aspectul practic, ei nu au un mod sistematic de a scrie orice număr — sistemul zecimal pe care îl folosim azi va apare în India. Grecii reprezintă numerele prin mulțimi de puncte regulat aranjate. De pildă pătratele prin puncte așezate în patrat (fig. 17 *a*) — de aici au rămas și denumirile patrat, cub etc. — ceea ce îi face să desprindă relația $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, adică diferențele între patratele consecutive:

$$1 \underset{3}{\smile} 4 \underset{5}{\smile} 9 \underset{7}{\smile} 16 \underset{9}{\smile} 25 \ldots$$

sînt numerele impare consecutive.

Se ocupă cu numere triunghiulare (fig. 17 *b*), în fond numerele de forma $\frac{1}{2} n\ (n + 1)$ adică 1, 3, 6, 10, ... unde diferențele sînt numerele naturale la rînd. Se ocupă cu numere piramidale, adică $1 + 4 + 9 + \ldots$ etc.;

Un mister fascinant îl constituia relația între număr și divizorii lui. Un număr egal cu suma divizorilor lui se numea *perfect* — denumire care arată nevoia unei relații „armonioase". 28 este perfect, căci $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Două numere astfel alese încît fiecare este egal cu suma divizorilor celuilalt se numesc *prietene*; ei cunosc perechea 220, 284.

Problemele privind numerele perfecte sau pe cele prietene au preocupat și pe matematicienii din evul modern, dar,

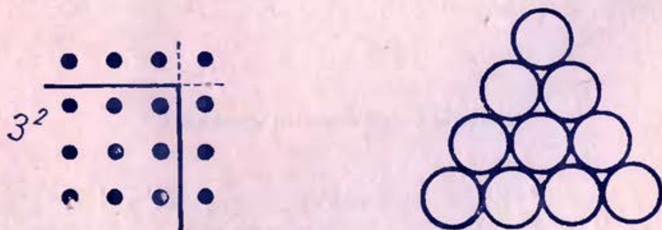


Fig. 17

deși s-au cheltuit pentru ele eforturi mari, nu sînt complet rezolvate nici astăzi.

Conținutul aritmetic al acestor probleme îl putem înțelege. Cuvintele devin însă pur exterioare, cînd ne referim la mistica numerelor întregi, la concepția filozofică. Numărul este — pentru pitagoricieni — noțiunea primordială, pentru o teorie a universului, mai mult, este nu numai simbolul, ci chiar realitatea primă a unor noțiuni filozofice și chiar fizice; numărul 5 semnifică culoarea; origina focului este... piramida etc., inutil să mai înșirăm de vreme ce nu înțelegem! Este adevărat că și un mare aritmetician din secolul trecut (Kronecher) a afirmat: „numărul întreg l-a făcut dumnezeu; restul a fost făcut de oameni"; dar această propoziție, cu un aer atît de specific pitagorician, avea aici un înțeles mult mai restrîns: se referea mai mult la faptul că *celelalte* numere (raționale, reale, complexe) se definesc treptat cu ajutorul numărului natural și că analiza în întregul ei poate fi „aritmetizată".

Muzică și astronomie

În școala lui Pitagora se descoperă un fenomen fizic interesant și care nu putea să nu impresioneze puternic pe îndrăgostiții ideilor armonice, ceea ce am numi legea coardelor sonore. (De altfel, legătura între sunete și anumite rapoarte de numere întregi fusese studiată și anterior, făcînd să sune vase identice în care se turna apă la diverse înălțimi.)

Lungimile coardelor care dau o notă, chinta ei și octava ei sînt proporționale cu numerele 6, 4, 3 care formează o progresie *muzicală*; (astăzi, numim medie *armonică* a numerelor a și b, numărul c care satisface relația $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$;

se verifică imediat că 4 este media armonică a numerelor 6 și 3).

Un studiu foarte interesant — chiar dacă nu era nou. Dar să vedem urmarea, consecințele. O consecință în domeniul astronomiei! Pitagoricienii gîndesc că distanțele de la pămînt la planete trebuie să fie tot în progresie muzicală! (teorie din care a rămas, probabil, și expresia: muzica sferelor cerești).

De ce tocmai în progresie muzicală?

Astăzi, obișnuiți cum sîntem ca orice afirmație să fie bazată sau pe un raționament sau pe o experiență, punem această întrebare: de ce așa? Apare o deosebire esențială de mentalitate, asupra căreia este interesant să medităm. Pitagoricienii fac afirmația de mai sus fără o demonstrație matematică — evident că într-o astfel de problemă privind *fapte*, așa ceva nu e posibil nici în principiu — dar și fără a face o măsurătoare — pe care, de altfel, tehnica timpului nu o face posibilă; ei fac afirmația pe baza *unui sentiment*; pe baza sentimentului că legile naturii trebuie să fie simple, cu o anumită armonie interioară.

Înțelegem setea de cunoaștere, dorința, tensiunea de a ști — e acesta un aspect demn de admirație la acești oameni încă, în multe privințe, neștiutori. Și înțelegem, îi simpatizăm, îi compătimim pentru „seceta" în care trăiesc, pentru faptul că nu au mijloacele suficiente să-și potolească această sete. Sîntem însă înclinați să-i mustrăm: dacă nu poți măsura de ce nu taci, de ce nu te resemnezi să spui simplu și curajos: nu știu?

W. Rouse Ball, autorul unei istorii a matematicii (pe care am folosit-o ca bibliografie principală) spune în referire la astfel de idei: „Nu ne vom ocupa prea mult cu ideile filozofice ale lui Pitagora, la care nici n-am fi făcut aluzie, dacă tradiția pitagoriciană despre existența unei legături între filozofie și matematică nu ar explica *nefericita tendință* a grecilor de a funda studiul naturii pe conjuncturi filozofice și nu pe observații experimentale".

Și totuși... Sentimentul acesta că legile naturii trebuie să fie simple a dăinuit de-a lungul istoriei științei. El singur nu a mai fost determinant; dar a întovărășit mereu cercetarea bazată pe rațiune și experiență. Nu a mai dictat afirmații categorice, dar a dictat *ipoteze de lucru*. În căutarea adevărului, îl dorim simplu, chiar dacă după aceea ne supunem verdictului experienței — tot astfel cum un elev s-așteaptă ca rădăcinile ecuației de gradul II să fie întregi și cînd vede un radical dintr-un patrat neperfect își spune „probabil am greșit" — deși dacă s-ar lua coeficienții la întîmplare, acesta ar fi cazul cel mai frecvent.

Un exemplu elocvent avem chiar în legătură cu chestiunea care a preocupat pe Pitagora: distanțele la planete. În 1778 — remarcați anul — a fost publicată așa-zisa legea lui *Bode*:

Scriem progresia geometrică (plus un zero)

0 3 6 12 24 48 96 192 384

Adăugăm fiecărui termen 4 și împărțim cu 10

0,4;	0,7;	1;	1,6;	2,8;	5,2;	10;	19,6	38,8
Mercur	Venus	Pămînt	Marte		Jupiter	Saturn	Uran	

Obținem distanțele de la Soare la planete, cînd se ia ca unitate distanța Soare—Pămînt.

Nu există nici o justificare pentru această „lege" — decît aceea că printr-un calcul *simplu* se obțin rezultate concordante cu realitatea. Da; dar există un gol, la termenul 2,8. *Probabil* mai există o planetă pe care însuși Kepler (în jur de 1600) o bănuise spunînd: *Intra Martem et Jovem interposui planetam*. S-o căutăm, se hotărăște într-un congres de astronomi. Și mulți o caută febril— rețineți pe ce bază. În 1801 se descoperă într-adevăr o planetuță numită *Ceres*; marele Gauss reușește ca numai cu puține date (o mică porțiune a traiectoriei) s-o calculeze în întregime și — senzație, entu-

ziasm — distanța ei este tocmai 2,8! De altfel, planeta Uran a fost descoperită și ea după publicarea legii lui Bode și se așezase, cuminte, exact la locul prevăzut.

Dar va veni și o... decepție, legată totuși de un mare succes al gîndirii deductive. În 1846 *Le Verrier* afirmă existența unei planete pe care o descoperise, cum s-a exprimat Arago, „în vîrful peniței sale“ — adică nu prin observații, ci prin calcul ținînd seama de influența acestei planete necunoscute, prin legea atracției universale, asupra mersului celorlalte planete. Ulterior, un observator confirmă, prin observație directă, existența acestei planete noi care s-a numit Neptun. Frumos succes și atît de elocvent pentru forța gîndirii umane; de altfel, celebru, fiind citat ori de cîte ori e vorba de a exemplifica această forță.

Succes însă dublat, cum spuneam, și de o decepție. Distanța acestei planete este 30 și nu 38,8 cum ar fi rezultat din „legea“ lui Bode.

Legea lui Bode era deci o simplă potrivire de cifre, care ar fi satisfăcut simțul nostru de simetrie și simplitate, dar la care trebuie să renunțăm și să ne mulțumim a înșira într-un tabel distanțele așa cum sînt, așa cum rezultă din măsurători, și nu cum am dori să fie.

Am lungit puțin povestea pentru că am vrut să supunem cititorului material de reflecție în legătură cu *put rea gîndirii umane*. În matematica pură, așa cum mai spuneam, rezultatele găsite prin gîndire nu au nevoie de o verificare experimentală; căci în esență matematica, în special geometria, stabilește nu adevăruri obiective ci implicații: din condițiile *A* rezultă logic condițiile *B*.

În științele naturii, în cercetarea adevărului obiectiv, rațiunea are un rol pozitiv, în unele probleme important sau foarte important. Dar ea singură nu poate decide. În descoperirea lui Le Verrier rolul rațiunii a fost foarte important, dar ea s-a folosit *în mod esențial* de date pe care le furnizase observația.

Numai o justă îmbinare — complexă, dialectică — între informațiile directe ale experienței și cele indirecte ale gîndirii deductive asigură progresul științei.

Sentimentul privitor la armonia și simplitatea legilor naturii are *uneori* un rol pozitiv. Iată o lege falsă dictată de acest sentiment, legea lui Bode, care stîrnește curiozitatea și cercetarea pentru descoperirea planetei Uran, a asteroidului Ceres. Dar bănuielile, ipotezele dictate de acest sentiment trebuie ținute strîns sub semnul dubiului, trebuie supuse examenului riguros al rațiunii și experienței. Cuceririle moderne ale fizicii duc la concluzia că acest sentiment reflectă în alte probleme mai mult imperfecția mijloacelor umane de cunoaștere, decît situația obiectivă. *Pentru că* ne descurcăm greu în probleme complicate, suprapunem noi realității niște scheme mai simple. Nu găsim astfel decît *aproximații*, utile desigur, dar care în fond nu constituie decît o primă etapă. Astfel, dependența funcțională cea mai simplă este aceea a mărimilor proporționale. Multe legi din fizică se traduc prin mărimi proporționale — de pildă cantitatea de căldură cedată unui corp este proporțională cu ridicarea de temperatură, coeficientul de proporționalitate la unitatea de masă fiind căldura specifică. Se constată la un studiu mai amănunțit că această proporționalitate nu e decît o aproximație sau nu e valabilă decît pe anumite intervale. Aceasta se traduce în exemplul dat prin afirmația: căldura specifică nu este constantă pe toată scara temperaturii: deci ea este *o constantă* (prin definiție un coeficient de proporționalitate este constant) *care variază*! Oricît ar fi de ciudat, afirmația nu e absurdă, ea nu face decît să traducă mersul progresiv al cunoașterii.

Oricît am fi de decepționați prin aceasta, trebuie să recunoaștem că fizica modernă contrazice sentimentul despre simplitatea legilor naturii. Ecuațiile matriciale din fizica atomului, spațiul riemannian din teoria relativității nu sînt de loc lucruri simple, nu seamănă în această privință nici cu teorema lui Pitagora, nici cu progresia muzicală.

Problema este nu să înghesuim natura în cadrele strîmte ale unei gîndiri simpliste, ci dimpotrivă, să ridicăm calitatea gîndirii umane și să-i adăugăm mijloace din ce în ce mai rafinate de cunoaștere, pentru a înțelege natura așa cum e.

În lumina acestei perspective moderne asupra științei, putem înțelege mai bine și meritele și limitele gîndirii matematice a grecilor antici, acești pionieri și ctitori ai culturii umane.

Epoca 600—300 î.e.n. Perspectivă generală

Materialul faptic al acestei perioade este cu mult mai bogat. Ne-am referit la Tales și la școala lui Pitagora — la aspectele considerate ca cele mai reprezentative ale acestei perioade, intercalînd și unele reflecții din perspectiva actuală. Menționăm numai — fără a da nici măcar informații în linii mari — că în această perioadă activează în Elada multe alte școli.

Spiritul școlii lui Pitagora, într-o formă mai atenuată sau mai accentuată, se transmite și altor școli. Il regăsim în școala lui Platon de la Atena. Pe frontispiciul ei scrie „nimeni să nu intre aici dacă nu este geometru" — dar înăuntrul ei găsim mult mai puține realizări matematice noi și mai mult teoretizarea acestui spirit prin lucrările de filozofie ale lui Platon, la care am mai făcut aluzie.

Există și concepții materialiste asupra lumii — Leucip și Democrit fiind cei mai străluciți reprezentanți — care însă, datorită condițiilor sociale, istorice, în ciuda justeței de fond, luptă din greu cu concepțiile idealiste dominante și vor recolta succese în știință abia mai tîrziu, prin Arhimede.

Sub impulsul concepției idealiste dreapta, cercul și sfera sînt considerate figuri perfecte. Aceasta conduce la atenția deosebită care se dă *construcțiilor cu rigla și compasul* — instrumente cu care se pot trasa drepte și cercuri. Au dat naștere la eforturi extraordinare — continuate pînă în secolul al XIX-lea — așa-numitele probleme celebre ale antichității, trisecțiunea unghiului, duplicarea cubului, cuadratura cercului — celebre tocmai pentru că nu au putut fi rezolvate.

Este vorba de împărțirea unui unghi în trei unghiuri egale; găsirea laturii cubului care are volumul de două ori cît al unui cub dat (se spune că însăși oracolul din Delhi ar fi pus condiția, pentru încetarea unor calamități: duplicați cubul — altarul templului avînd chiar forma cubică); găsirea unui patrat avînd aria cît a unui cerc dat — în toate cazurile, evident, numai cu rigla și compasul. O serie de cercetători ai antichității au propus soluții *mecanice*, practice, dar care nu erau reductibile la riglă și compas, astfel încît cercetările au continuat. Problema nu a fost închisă decît în secolul al XIX-lea cînd Gauss *a demonstrat* că aceste construcții *nu pot* fi, nici în principiu nu numai în fapt, făcute.

Teoria figurilor perfecte a influențat negativ și dezvoltarea științelor naturii. S-a crezut că planetele „trebuie" să se miște după cercuri, zeii nu le-ar fi putut trasa o traiectorie neperfectă. Dar observațiile nu coincideau cu teoria; concepția despre necesitatea traiectoriei circulare era atît de puternică încît s-a imaginat, tot în cadrul ei, o teorie care s-o respecte și să coincidă și cu observația. Anume, s-a imaginat că planeta descrie un cerc, care la rîndul său se rostogolește pe alt cerc, drumul descris fiind numit acum o *epicicloidă*. Epicicloida se apropie mai mult de forma reală a traiectoriei care, știm astăzi, este o elipsă. Dar tot nu coincide. Atunci, s-a mai introdus un cerc, deci planeta se mișcă pe un cerc, care se rostogolește pe alt cerc, care și el se rostogolește pe altul... o teorie complicată a epiciclelor. Va trebui să așteptăm pînă la Kepler (1600) pentru ca fenomenul observat să fie îmbrăcat în haina lui matematică adevărată, care i se potrivea de minune, deși nu era croită din cercuri.

În rezumat, perioada 600—300 î.e.n. este caracterizată prin:

— înlocuirea metodei empirice prin metoda raționamentului, a deducției logice — ceea ce constituie o schimbare calitativă esențială;

— aceasta aduce o efervescență creatoare, o vie și entuziastă activitate euristică — un fel de epocă romantică a matematicii; ea are ca efect o sporire considerabilă a cunoștințelor geometrice;

— ca revers, o îndepărtare de preocupările practice, transformarea geometriei într-un fel de artă pură, cu satisfacții în ea însăși, date în primul rînd de exersarea perspicacității, în al doilea rînd de cultul „armoniei interne", al frumosului;

— legat de acest revers, amestecul între geometrie și concepții filozofice mistice, idealiste, fruct al speculațiilor lipsite de spirit critic, concepții în cadrul cărora se consideră că natura ar putea fi cunoscută numai prin rațiune și sentimente, care deci frînează progresul științelor naturii.

Capitolul III

MATEMATICA — SISTEM LOGIC

ŞCOALA DIN ALEXANDRIA

Multe generaţii s-au delectat citind isprăvile lui Alexandru Macedon, minunîndu-se de performanţele războinice ale acestui tînăr, care în zece ani cucerise toată lumea ce conta în acea vreme: Persia, Siria, Egiptul... Astăzi, nu mai e la modă. Ne interesează mai mult istoria umanităţii decît a căpeteniilor de armate, chiar şi în acest caz al celui mai viteaz dintre ele, ne interesează mai mult istoria culturii cu progresul ei încet dar sigur, decît strălucitoarele dar efemerele cuceriri de teritorii. Însuşi Alexandru galopînd prin pustietăţile Asiei — deşi elevul marelui Aristot — nu s-ar fi gîndit la dedesubturile sau la consecinţele îndepărtate ale faptelor sale care apăreau numai ca fapte de arme...

În 332 î.e.n. întemeiază oraşul Alexandria. În 323, la moartea sa, imperiul pe care îl fondase, prea mare pentru a putea fi guvernat — mai ales cu mijloacele de comunicaţie de atunci — fu împărţit în 4 părţi. Egiptul reveni lui Ptolemeu.

Acest general al lui Alexandru, fondatorul dinastiei Ptolemeilor, aprecia în mod deosebit ştiinţa, cultura. Poate că urmînd exemplul lui Alexandru care declarase generalilor săi, miraţi de atenţia pe care binevoia să o dea unui simplu filozof: dacă nu aş fi Alexandru, aş vrea să fiu Diogene. Poate că Ptolemeu îşi dă seama că oraşul în care îşi instalase capitala, cu mari bogăţii acumulate în războaiele lui Macedon

ca și cele datorite faptului că se află la răscrucea comerțului între Orient și Occident, va avea numai de profitat — și material și ca prestigiu — dacă va străluci și în cultură.

Fapt e că Ptolemeu I Lagos nu precupețește nici o cheltuială pentru a crea condiții de înflorire științei. El înființează vestitul *Muzeu* din Alexandria — ceea ce am numi astăzi o Universitate-Academie-Institut de cercetări — construindu-i clădirile în preajma palatului său. Îl dotează cu săli de studiu, cu laboratoare conținînd toate aparatele și mașinăriile inventate pînă atunci, cu grădină zoologică și, mai ales, cu o bibliotecă ce avea să ajungă în curînd la 600 000 de volume (suluri) — pe care o bănuim deci *completă*.

Dotarea materială este dublată de dotarea cu oameni. Ptolemeu cheamă pe toți oamenii care se făcuseră cunoscuți prin știința lor în cadrul acestui Muzeu, ceea ce determină mutarea centrului de greutate al culturii din Grecia, din Atena în particular, la Alexandria.

Conducerea secției de matematică fu încredințată lui Euclid.

Secolul III î.e.n. este supranumit *secolul de aur* al geometriei și este ilustrat de cele mai mari figuri ale științei antice: Euclid, Arhimede, asupra cărora ne vom opri mai îndeaproape, mărginindu-ne — cu regret — să cităm și pe Aristarh din Samos (310—250), astronom care a susținut teza mișcării Pămîntului în jurul axei sale și în jurul Soarelui, Apollonius din Pergam (260—200), autorul unui celebru tratat asupra secțiunilor conice, Eratosthene (275—194), care a măsurat meridianul terestru și a creat „ciurul" numerelor prime.

Școala din Alexandria va dura — cu mai puțină strălucire după instaurarea stăpînirii romanilor — pînă la arderea bibliotecii de către arabi în anul 641 (biblioteca mai fusese parțial distrusă și de către soldații lui Cezar).

Capitolul de față, *Matematica — sistem logic*, nu privește toată opera acestei școli și nici măcar a secolului de aur, căci nu ne ghidăm de criteriile cronologice ale istoriei, ci de conținutul de idei, criteriu care ne conduce la a prezenta într-un capitol special opera lui Euclid, în fond una din operele sale,

Elementele, cea mai puternică, aceea care va continua să trăiască peste toate vicisitudinile mileniilor și care își pune amprenta pe matematica modernă a secolului nostru.

Euclid (330—275 i.e.n.)

Istoricii antichității ne vorbesc despre operele înaintașilor lor. Unele din scrierile matematicienilor antichității s-au pierdut; ele sînt reconstituite după *comentariile* asupra lor făcute de istorici (în special de Proclus, sec. V). Dar acești istorici vorbesc prea puțin sau deloc despre viața matematicienilor. E de bănuit că, în condițiile de lucru create Muzeului din Alexandria, viața lor este, din fericire pentru operă, lipsită de evenimente exterioare.

Nu știm mai nimic despre viața lui Euclid. Numele Euclid nu mai evocă astăzi o figură umană; el a devenit sinonim cu acela de geometrie (unii filologi au susținut chiar că etimologic eu-clid ar însemna „cheia figurilor"). Euclid este astăzi o operă. Figura lui umană s-a estompat ștearsă de vremuri, iar în locul ei se desenează strălucitoare imaginea operei sale, monument nepieritor, geometria euclidiană. Nici unei cărți nu i se potrivește mai bine versul poetului Horațiu, *exegi monumentum aere perenius* (am ridicat un monument mai durabil decît bronzul).

Timp de 2 000 de ani, *Elementele* lui Euclid înseamnă „Manualul", singura lucrare după care se poate învăța geometrie. Abia în 1794 se face de către Legendre o *prelucrare*, mai accesibilă, a acestei cărți; abia de la această dată, ea începe să-și piardă rolul de manual direct — deși autorii ulteriori păstrează liniile mari, uneori și stilul cărții de bază — deci abia în ultimele două secole Elementele devin „document istoric".

A fost tradusă în 300 (trei sute) de limbi.

S-a făcut o statistică interesantă: care au fost cărțile cele mai citite (după totalul de exemplare tipărite în repetate

ediții și traduceri). Nu căutați să ghiciți rezultatul; poate că el nu mai e valabil astăzi; azi avem impresia că un roman și nu o carte de știință ar trebui să dețină recordul. Iată clasificarea: lăsînd la o parte Biblia care a fost nu atît cerută cît donată sau impusă de numeroasele echipe de misionari ai creștinismului, cele mai citite cărți din lume au fost: *Elementele* lui Euclid, *Istoria naturală* a lui Pliniu, *Divina comedie* a lui Dante.

Astăzi cînd, așa cum spuneam, *Elementele* au devenit un document istoric, se cuvine să privim și să analizăm obiectiv fenomenul apariției acestei cărți și rolul pe care l-a jucat în dezvoltarea multimilenară a geometriei.

Constituie Elementele o operă originală?

Pînă la Euclid s-au descoperit o serie de teoreme de geometrie, demonstrate *prin metoda deductivă*, și am avut prilejul să amintim mai înainte unele din ele.

Primul impuls al lui Euclid a fost *să le strîngă la un loc*. Poate îl îndemna la aceasta însăși funcția lui în cadrul Muzeului. Am arătat că exista aici o *bibliotecă* și este normal ca într-un depozit de știință lucrurile să fie ordonate, clasificate, sistematizate. Dar se țineau și cursuri publice și era de asemenea natural ca studenții să aibă un material sistematizat. Este probabil că astfel de sarcini exterioare concordau și cu o anumită înclinare personală de colecționar. Așa cum unii fac culegeri de proverbe sau de maxime sau de poezii populare (sau... de anecdote) etc., Euclid s-a simțit atras să facă o colecție de teoreme. Ca la orice colecționar, pentru că i-au plăcut, pentru că sînt multe și pentru că vrea să le păstreze, să le aibă.

Nu găsim în această carte nimic original, nici o teoremă descoperită de autorul ei? Găsim multe teoreme despre care știm cu siguranță că au fost descoperite de predecesori; găsim și altele despre care nu putem spune cine le-a descoperit. Cu siguranță — siguranță de ordin psihologic și nu

una bazată pe documente istorice precise — printre acestea se află și teoreme descoperite de însuși Euclid. Nu se poate ca acest sistematizator al geometriei să nu fi găsit și locuri goale, să nu fi căutat să le umple, să nu fi putut — dată fiind inteligența și capacitatea sa — să le umple.

Saltul calitativ realizat de Euclid

Euclid e mare nu prin teoremele izolate pe care le-a descoperit personal, ci prin colecția pe care a făcut-o. Cum? Putem pune mai presus acțiunea de a colecționa, decît pe aceea de a descoperi, de a crea?

În geometrie, da.

Să gîndim cu atenție. În geometrie se impune *un criteriu de fond* pentru ordonarea și sistematizarea colecției de teoreme. O colecție de maxime poate fi făcută după un criteriu arbitrar, de pildă după alfabet sau după alt criteriu la fel de valabil, de pildă după conținut (despre egoism, despre vanitate, despre avariție etc.). O colecție de teoreme nu poate fi aranjată decît printr-un singur criteriu: *cel logic*. Este cert că o teoremă în demonstrația căreia folosim suma unghiurilor într-un triunghi trebuie pusă *după* teorema care stabilește cît este această sumă.

Ordinea organică, singura posibilă, în geometrie este lanțul deductiv.

Lanț deductiv care nu are capăt la extremitate — rămîne mereu deschis pentru noi verigi, noi concluzii — dar care trebuie să aibă un capăt la origină, la început. Iar punctul de plecare îl constituie definițiile și axiomele. Definiții; am văzut că însuși spiritul euristic, deși avîntat înainte, spre descoperire de noi proprietăți, simte nevoia unei întoarceri pentru înlocuirea noțiunilor gîndite în formă de descrieri (dreptunghiul la Tales) prin definiții logice în care să se distingă atent ce este dat de ce este dedus; am văzut de asemenea că, prin proprietăți caracteristice, o aceeași noțiune

poate fi definită în moduri diferite, deci trebuie să optăm pentru una din definițiile posibile, cea mai simplă, și trebuie să arătăm riguros echivalența între două definiții posibile. La Euclid problema definițiilor se pune *în ansamblu*; nu în vederea *unei* teoreme, ci în vederea construcției *întregului*. Axiome; adevăruri evidente, pe care predecesorii lui Euclid le *subînțeleg*, nu stăruie asupra lor, nici măcar nu le enunță explicit, fiind de la sine acceptate, acest genial, minuțios colecționar le enunță explicit și le catalogheazǎ. Ni se pare un lucru minor, chiar plicticos și pedant, să se spună și să se sublinieze că două cantități egale cu o a treia sînt egale între ele; ce aflu cu asta? nu-mi dădeam seama și singur că așa este? Personal, mărturisesc plin de umilință, că dacă aș fi fost contemporan cu Euclid, nu l-aș fi înțeles și, mai ales, nu l-aș fi gustat. Istoria dezvoltării ulterioare a geometriei va dovedi cît de importantă era această catalogare minuțioasă a axiomelor. Ea aduce o schimbare de perspectivă și pînă la urmă nu numai un orizont nou, ci o nouă structură a matematicii. Prin ea, atenția și interesul nu se mai îndreaptă fascinant spre proprietățile ascunse, neașteptate, senzaționale; în centrul atenției se pune problema dacă o anumită propoziție — fie ea și foarte banală — trebuie catalogată la rubrica axiome sau la rubrica teoreme.

Într-un triunghi o latură e mai mică decît suma celorlalte două.

Închipuiți-vă că cineva ar enunța această propoziție în școala lui Pitagora — acolo unde se sacrifica cel mai frumos taur pentru că se descoperiseră cele 5 poliedre regulate — sau în Agora la Atena, cadrul celor mai vii și mai interesante discuții filozofice. Ar fi fost întîmpinat, în cel mai bun caz, cu zîmbete. Întrevedem riposta: Ei și? Ce-ai descoperit cu asta? Sigur că drumul drept e mai scurt decît pe ocolite...

În Euclid, perspectiva este complet schimbată. El înscrie explicit această propoziție și, pentru că o demonstrează, o intitulează teoremă. Faptul în sine nu este interesant; știam că linia dreaptă e mai scurtă; interesant e în ce rubrică este el pus. Oricît ar fi el de evident, trebuie încadrat la teoreme. *Numărul axiomelor trebuie restrîns la minim.*

Geometria lui Euclid apare ca o construcție unitară; cărămizile ei sînt definițiile, axiomele și teoremele — unele din ele, poate majoritatea, „prefabricate"; dar ceea ce interesează și impresionează nu sînt cărămizile, ci *linia arhitectonică* a construcției în ansamblul ei, precum și *soliditatea* construcției. Este necesar pentru aceasta ca fiecare cărămidă să fie tare — fiecare teoremă riguros demonstrată — dar aceasta nu e și suficient: mai trebuie ca aceste cărămizi să fie bine legate între ele și ca *fundamentul* construcției — definițiile și axiomele — să fie, de la început bine turnat.

Revoluția, saltul calitativ săvîrșit de Euclid, este trecerea de la matematica-artă, de la matematica văzută ca o sumă de probleme de perspicacitate, uneori special inventate în acest scop, la matematica-sistem logic. Înțelegem mai bine acum — nu încă în mod complet — definiția 3 pe care am citat-o în introducere: „un ansamblu de propoziții aranjat în conformitate cu o succesiune de deducții logice".

Acest salt calitativ a necesitat, conform unei legi dialectice fundamentale, o acumulare cantitativă.

Munca entuziastă a celor trei secole anterioare a acumulat materialul: aceasta fără să se știe clar pentru ce, fără să existe o comandă fermă din partea arhitectului care nu se născuse încă. Mobilul acestei activități a fost, cum am mai spus, această atît de umană atracție pentru problematic, plăcerea de a gîndi, jocul ideilor am spune dacă putem concepe jocul și într-un cadru solemn, grav. Rezultatul acestei activități nu era, atunci, paralel cu desfășurarea ei, vizibil. Un fenomen obișnuit în istoria matematicii, poate și în alte domenii ale activităților umane: rezultatul nu coincide cu scopul explicit. Minunat e că, adesea, el depășește sfera așteptărilor. Eforturile umane cinstite, dacă sînt dirijate de impulsuri naturale, sănătoase, nu se pierd; și în cazul cînd nu conduc la scopul vizat, conduc totuși la ceva; uneori, în particular în matematică, la ceva mai frumos decît s-arăta în intenție sau în vis.

Această muncă de pregătire, de acumulare de material, a fost, istoric și psihologic, *necesară*. Susțin unii filozofi

idealişti că un sistem logic este o construcţie *arbitrară* a minţii umane: ne alegem un sistem de axiome şi tragem pe rînd concluzii logice din el. În realitate, axiomatizarea unei ştiinţe este o treaptă în procesul dialectic al cunoaşterii. Nu o treaptă de plecare, ci una tîrzie, de *maturizare*, de sistematizare a teoriei ştiinţifice.

Engels însuşi spunea: „Principiile nu sînt punctul de plecare al cercetării, ci rezultatul ei final". Citîndu-l, A.D. Alexandrov adaugă: „Menţionăm că unii formalişti contemporani uită acest lucru şi cred că este cel mai raţional să expună şi chiar să dezvolte teorii plecînd de la axiome care nu sînt precedate de nici un fel de analiză a conţinutului real pe care ele sînt menite să-l sintetizeze".

Istoria ne ajută să înţelegem mai profund o ştiinţă şi, mai ales, să intuim semnificaţia ei umană.

Ar fi fost posibil Euclid, fără lanţul evolutiv care pleacă de la egipteni şi trece, prin Tales, Pitagora şi mulţimea de şcoli, la el? Nu. Cum s-au petrecut lucrurile, aşa era natural să se petreacă — cel puţin în liniile de esenţă. Se spune că regele i-a cerut luiEuclid să-i explice geometria mai pe scurt, neavînd prea mult timp pentru asta, la care el a răspuns: Nu există în geometrie o cale, mai scurtă, pentru regi.

Umanităţii însăşi i s-ar putea da o lecţie analoagă: drumul ştiinţei este lung, uneori ocolit; dar el trebuie parcurs efectiv, cu răbdare şi cu încîntarea drumului însuşi.

Geometrie «pură»

Ceea ce părea o simplă operaţie de catalogare s-a dovedit deci a fi o transformare calitativă. Aşezînd teoremele în lanţ deductiv, pentru fiecare din ele iese în evidenţă funcţia ei *de legătură*. Adevărul geometric izolat era pînă acum monovalent: îl am, nu se ştie de unde, şi îl aplic — egipteni; îl caut, îl descopăr şi mă opresc asupra lui, îl contemplu — Pitagora. În Euclid, el devine bivalent;

e în același timp și un *rezultat* al șirului de propoziții anterioare și *o sursă* a propozițiilor ce urmează. Teoremele își pierd oarecum „personalitatea" proprie, devenind părți constitutive ale unui întreg superior — în genul unor recruți care după ce sînt îmbrăcați în uniformă și așezați în rînduri devin *o unitate* militară.

Această transformare de structură a geometriei aduce în mod natural și o schimbare a sentimentelor cu care este ea privită. Misterul se dizolvă. Și în fața unei teoreme izolate există — cum am arătat vorbind despre poliedrele regulate — o schimbare de perspectivă de la enunțul în sine la enunț + demonstrație, de la un enunț surprinzător și oarecum „misterios" la un enunț explicat, luminat, deci dezgolit de mister. Un fenomen analog, la scară mare, se întîmplă cu geometria însăși. Ea se rupe de filozofie, de interpretări mistice, idealiste: în lumina solară, completă a raționamentului logic, ea apare exact cum e, purificată de falsele mistere ale clar-obscurului inițial.

Proprietățile decurg din axiome și definiții, nu mai reflectă cine știe ce „idei" apriorice, cine știe ce atribute ale perfecției divine. Geometria devine geometrie.

Geometria — știință pură este încă unul din meritele lui Euclid și ale etapei istorice căreia el îi aparține.

Pură, axată pe propriul ei obiect, ea pare a rupe nu numai legăturile la dreapta, cu filozofia mistică, ci și pe cele la stînga, cu problemele practice. Dacă lui Tales criteriul de asemănare îi apare ca un instrument propriu pentru a face măsurători indirecte pe teren, în Euclid el își ia rolul de verigă, e concluzia unei teoreme, este sursa, metoda de demonstrație pentru alte teoreme. Importantă pentru progresul cunoașterii este prima ruptură. A doua este numai provizorie și aparentă. Prin construcția unui sistem logic, umanitatea cîștigă o metodă, un aparat complex și cu mare eficacitate în cunoaștere. Chiar dacă nu toate teoremele acestui sistem au aplicații imediate și directe, sistemul în sine e un nou mod de a gîndi și acest mod de a gîndi își va găsi — nu neapărat în cadrul geometriei în care s-a născut

— altfel de aplicații, mai ample și mai esențiale, decît cele imediate, în știința despre natură în ansamblul ei și nu numai în măsurători pe teren. Cînd un elev face fel de fel de exerciții de rezolvare a ecuațiilor formale, ele par rupte de aplicații; rostul lor apare abia cînd trece la probleme propriu-zise, în cadrul cărora capacitatea de a rezolva ecuații își vădește utilitatea. Geometria euclidiană, prin fixarea atenției pe articulațiile pur logice, nu pierde — ci numai lasă provizoriu în umbră — aplicațiile imediate. Dar și fără ele, dacă ea nu ar constitui decît un exercițiu pe linia formării gîndirii deductive în mare, ar închide în ea o utilitate de alt ordin și de mai mare anvergură: dotarea omului cu un nou instrument, mai fin, de cunoaștere.

Rigurozitatea demonstrațiilor

Astăzi, în concepția modernă, demonstrațiile lui Euclid nu mai sînt absolut riguroase. Abia astăzi, după atîtea secole. Ceea ce înseamnă că, la vremea lor, au fost extrem de riguroase.

Să considerăm faptul că o latură e mai mică decît suma celorlalte două. Nu-i oare „evident prin el însuși"? Euclid demonstrează acest fapt, ca și altele tot atît de „evidente".

Nimic nu este „evident", ci este sau nu este o consecință logică a sistemului de axiome.

Și prin această trăsătură Euclid e un precursor al modernismului.

Ce l-a făcut să depună o muncă migăloasă pentru chestiuni care păreau a nu necesita o astfel de muncă?

În *prezentarea* pe care profesorul Ion Ionescu a făcut-o ediției românești a *Elementelor*, se spune: „Acea rigoare extremă și-a impus-o ca să nu mai dea loc de a i se critica *Elementele* de către sofiștii din vremea lui, care căutau cusururi în toate raționamentele oamenilor de știință".

Această explicație ni se pare a fi în bună parte justă. Se știe că sofiștii se exersau în arta „oratoriei“ în acea „artă“ care consta a găsi argumente pentru oricare teză dată și ei puteau să pledeze cu egală „măiestrie“ o teză sau teza contrarie.

În adevăr, era un pericol să te prezinți în fața lor cu o teză, oricît de adevărată ar fi fost ea, dacă nu aveai pregătită o argumentare bine pusă la punct.

Oare lui Euclid, deși singur în camera lui de lucru scriindu-și opera, nu-i apărea în față imaginea sofiștilor gata să răstoarne lucrurile pe dos?

Nu se va fi pregătit el să preîntîmpine atacurile acelora care își făceau o plăcere din a argumenta „contrarul“ — indiferent de teza pe care o afirmai?

E plauzibil că da.

Și din acest punct de vedere am putea considera că sofiștii care au creat uneori false probleme, „sofisme“, au avut totuși și un anumit rol pozitiv.

De altfel, meritul sofiștilor în dezvoltarea logicii și dialecticii este recunoscut, iar principala școală sofistă (Protagora) are o concepție materialistă.

Cred însă că nu putem reduce la atît mobilul psihologic care împinge pe Euclid spre rigurozitate. Această tendință spre riguros se naște și se accentuează din însăși activitatea geometrică.

Important este să se pună problema de a căuta să descoperi lucruri noi, prin raționament deductiv. Aceasta este destul ca, în cadrul acestei activități, să se pună de la sine, în mod din ce în ce mai acut, și chestiunea rigurozității.

Este interesant să ne oprim atenția asupra acestui fenomen psihologic.

Cînd, pentru prima oară, ne simțim îndemnați să aflăm un adevăr nou, altfel decît prin experiență directă, deci prin deducție logică, aceasta nu se poate întîmpla pentru ceva care este „evident“ prin intuiție; aceasta se întîmplă cu o chestiune despre care simțurile nu ne dau informații precise și sigure.

Teorema lui Pitagora, de exemplu, este departe de a fi o evidență senzorială. Atunci cu adevărat ne vom simți îndemnați să o „deducem" din lucruri cunoscute.

Declanșarea înclinației spre raționament deductiv nu poate *începe* cu chestiuni despre care nu ne îndoim, cum ar fi, de exemplu, că laturile unui dreptunghi sînt egale, fapt pe care însuși Tales, cum am văzut, îl considera ca *dat*.

Abia după ce mintea a fost stimulată și antrenată la raționament deductiv pentru descoperirea adevărurilor „neevidente", din ce în ce mai multe enunțuri — considerate la început ca evidente — sînt puse sub semnul dubiului și trecute sub proba deducțiilor. Astfel se naște din interiorul activității geometrice înclinația spre demonstrații din ce în ce mai riguroase și, totodată, posibilitatea de a le aborda.

Din punct de vedere logic, este clar că trebuie început prin stabilirea teoremelor de la bază și *apoi* clădit, treptat, pe ele.

Din punct de vedere psihologic însă, trebuie început de la mijloc, de acolo de unde lucrurile nu sînt evidente, ci îndoielnice, efectiv dubioase. Abia după ce s-a trăit experiența vie a deducției și s-au prins unele obișnuințe, se va putea face o critică rodnică asupra lucrurilor pe care le-am considerat „evidente"; numai prin prisma acestei experiențe, evidențele necontrolate pot fi zdruncinate și transformate în probleme propriu-zise.

Învățămînt public

În opoziție cu școala lui Pitagora, rezervată inițiaților și așezată sub pecetea legii secretului, Euclid prezintă geometria într-o universitate deschisă tuturor. Un parc aristocrat a devenit un parc public; zidurile mucegăite care îl înconjurau au fost dărîmate, porțile au fost larg deschise. Cel puțin, în principiu; în fapt, evident, nu oricine are posibilitate să se plimbe în parc, chiar dacă el este public. Nu

i-ar trece nimănui prin minte că un sclav ar putea fi scutit de o parte din roboteala de zi și noapte ca să învețe geometrie. Dar, ținînd seama de condițiile istorice, și așa, o democratizare în principiu a geometriei constituie un progres. Istoria va confirma, prin epocile ei de accentuare a procesului de democratizare, această propoziție. O putem regăsi însă și „prin gîndire deductivă".

Democratizare înseamnă în primul rînd o masă mai mare de oameni din care se recrutează cercetătorii. Admițînd, printr-o schematizare de tip matematic, că talentele matematice în stare latentă ar reprezenta să zicem 5% din populație, vor deveni active și utile $n = \frac{5}{100} i$, unde i este numărul celor care învață și, evident, n este proporțional cu i.

În al doilea rînd, trebuie să ținem seama și de alt aspect decît cel statistic. Cînd știința este cunoscută și cultivată de mulți oameni, se creează o *atmosferă* socială de prețuire a ei. O atmosferă necesară mai ales matematicii-artă. Matematica cu roade palpabile este apreciată pentru rezultatele ei. Cînd însă e vorba de o matematică axată pe pasiunea de a gîndi sau pe probleme teoretice a căror utilitate nu este încă întrevăzută, activitatea este susținută de aprecierea pozitivă pe care publicul o dă performanțelor gîndirii în sine — analog cum sportivii se manifestă din plin cînd au „suporteri" entuziaști, numeroși...

Euclid ca manual didactic

Imboldul scrierii *Elementelor* a fost de ordin *pedagogic*: a pune în mîna studenților un material sistematizat. Din nou, intenția nu a coincis cu rezultatul. Euclid a devenit un mare creator în știință, creatorul primului sistem logic-deductiv. Dar a rămas un lamentabil pedagog. Am

„demonstrat" prima parte a enunțului — Euclid, creator în știință. Să ne ocupăm cu partea a doua.

Forma euclidică. Propozițiile au un mod de expunere, după un același tipar: 1) enunț, 2) determinarea problemei, 3) construcția, 4) demonstrația, 5) în concluzie se repetă enunțul adăugîndu-se cuvintele „ceea ce trebuia demonstrat" sau — în cazul problemelor — „ceea ce trebuia făcut".

Reproducem aici, pentru exemplificare, o singură propoziție — poate fi luată absolut la întîmplare — și adăugăm pe margine numerele care indică etapele arătate mai sus.

Ne oprim la propoziția 20 din cartea I pentru că am mai vorbit despre ea.

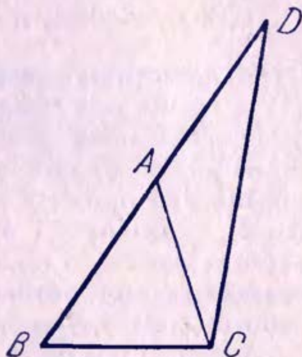


Fig. 18

1) { *În orice triunghi, două laturi luate oricum sînt mai mari decît cea rămasă.*

2) { Căci, fie *ABC* un triunghi; zic că în triunghiul *ABC* două laturi luate oricum sînt mai mari decît cea rămasă, anume, *AB*, *AC* mai mari decît *BC*; *AB*, *BC* decît *AC*; iar *BC*, *CA* decît *AB* (fig. 18).

3) { Căci, să se prelungească *BA* pînă în punctul *D*, să se ia *AD* egală cu *CA* și să se ducă *DC*.

4) Atunci, deoarece DA este egală cu AC, unghiul ADC de asemenea e egal cu ACD; deci BCD este mai mare decît ADC; și fiindcă DCB este un triunghi avînd unghiul BCD mai mare decît BDC, iar unghiul mai mare este subîntins de latura mai mare, deci DB e mai mare decît BC. Dar DA este egală cu AC; deci BA, AC sînt mai mari decît BC; în mod asemănător se poate demonstra că și AB, BC sînt mai mari decît CA, iar BC, CA decît AB.

5) Așadar, în orice triunghi, două laturi luate oricum sînt mai mari decît cea rămasă; ceea ce trebuia demonstrat.

Principala critică ce se aduce *Elementelor* ca manual didactic se referă tocmai la forma de expunere. Deși fiecare demonstrație este absolut corectă din punct de vedere logic și în general este cea mai simplă care se poate da, deși ordinea în care se așază propozițiile este de asemenea cea mai naturală, totuşi, prin faptul că se folosesc demonstrații *sintetice*, cititorul nu primește nici o indicație asupra felului cum *s-a descoperit* demonstrația respectivă, el nu e pus în situația de a-și forma o metodă, de a-și educa gîndirea creatoare.

Pe de altă parte, un începător în studiul geometriei nu are încă educat simțul rigorii, nu simte încă nevoia unor demonstrații pentru lucruri care i se par evidente.

Euclid prezintă matematica-rezultat. Pentru un om viu, interesantă este matematica-proces. Nu să învețe geometrie, ci să facă geometrie.

Efortul de a învăța geometrie, după un manual scris în stil euclidic, este penibil. Și fiindcă 2000 de ani Euclid a servit ca manual, a chinuit și îndepărtat de geometrie multe generații de elevi. Un autor tîrziu care încercase să facă o expunere mai atrăgătoare i-a pus titlul: *Euclid, fără lacrimi* — titlu semnificativ care arată că Euclidul original era *cu* lacrimi.

Capitolul IV

MATEMATICĂ ÎNTREAGĂ: MEȘTEȘUG, ȘTIINȚĂ, ARTĂ ȘI JOC, MIJLOC DE EDUCAȚIE

ARHIMEDE (287–212)

Matematician universal

Se înțelege curent prin matematician universal acela care este orientat în toate domeniile matematicii. Se spune că Poincaré (1854—1912) a fost *ultimul* matematician universal.

Luăm aici cuvîntul universal într-un sens mai larg, nu ținînd seama numai de obiectul cercetării ci, prin prisma punctului de vedere psihologic și istoric adoptat, referindu-ne și la *ce fel* de matematică se profesează.

În acest sens Arhimede este *primul* matematician universal, căci:

— a inventat mecanisme și aparate de o mare ingeniozitate, împletind gîndirea deductivă cu informații luate din contactul direct cu realitatea; le-a aplicat în probleme de viață majore, uneori de viață și de moarte;

— a rezolvat probleme care au necesitat descoperirea unor legi fizice și apoi prelucrarea lor matematică;

— a deschis orizonturi mari matematicii pure, prin faptul că a înțeles necesitatea de a se scrie numere oricît de mari dar, mai ales, prin cercetările care îl fac precursor, la distanță de 2000 de ani, al calculului integral;

— a făcut cercetări de matematică dezinteresată, axate pe plăcerea de a gîndi, nedisprețuind nici sectorul problemelor „distractive", situate între joc și matematica-artă;

— a împletit cercetarea euristică cu fundamentarea logică riguroasă, arătînd și cum a gîndit ca să descopere și cum, după aceea, caută o demonstrație matematică riguroasă;
— a intrat în contact cu alți matematicieni nu comunicîndu-le direct rezultatul, ci provocîndu-i să-l caute, dovedind astfel că a intuit cu deosebită finețe adevărata pedagogie a matematicii;
— a avut o concepție filozofică justă, bazată pe o concepție materialistă dar dînd locul cuvenit și gîndirii abstracte.
A trăit fenomenul matematic în toate aspectele și nuanțele lui.

Viața

S-a născut și a trăit în Siracuza. A studiat întîi cu tatăl său, astronomul Fidias, apoi la Muzeul din Alexandria, avînd ca profesor pe Conon, urmașul lui Euclid, și a păstrat legături cu oamenii de știință de acolo, prin scrisori, și după revenirea la Siracuza.

Fiind rudă cu conducătorul Siracuzei, Hieron, și sprijinul său prețios în probleme de tehnică, e de bănuit că nu a avut greutăți de ordin material, ceea ce i-a permis să se consacre cercetărilor. A dus totuși o viață foarte simplă — Cicero îl numește *humilis homunculus* (om de condiție modestă) — ceea ce, din nou, i-a permis să se consacre cercetărilor.

Ca și în cazul altor matematicieni, viața lui este în esență opera lui.

Dar spre deosebire de alți matematicieni, opera lui nu e reductibilă la scrierile lui. Există o operă — minunată — nescrisă, care se împletește cu viața, cu viața lui, cu viața Patriei lui. În această privință, informațiile istorice se împletesc cu informații nesigure, uneori cu legenda, dar fiindcă și aceasta e frumoasă și fiindcă nu se naște din gol, cel mult aureolează întîmplări reale, propun să-i facem cuvenitul loc.

Melcul. Încă de cînd era în Alexandria, Arhimede a inventat o mașină pentru irigarea ogoarelor — și ne dăm seama de importanța ei pentru Egipt, care este, cum s-a spus, un „dar al Nilului", însă ceea ce îi dăruiește Nilul — apele — trebuie bine folosit.

Mașina s-a numit *melc*, pentru că în axul ei este un corp *elicoidal*, formă pe care o întîlnim azi la șuruburi sau la axul mașinii de tocat carne, dar pentru care cei antici nu aveau ca model familiar decît unul foarte aproximativ: casa încolăcită a melcului. Rotind axul mașinii de tocat, carnea intră în „spirele" axului și astfel, prin mișcarea lui, este condusă spre celălalt capăt, unde se află cuțitul. Cam așa ceva se petrece cu transportul apei prin melcul lui Arhimede, numai că aici axul este înclinat față de verticală, astfel încît apa să se ridice de la un nivel la unul superior. Avînd dimensiuni mai mari, mișcarea de rotație este imprimată, prin intermediul unui cilindru, de un sclav, cu picioarele. (Imaginați-vă un vălătuc, un cilindru de lemn culcat la pămînt și în ce fel, urcîndu-vă pe el, ați mișca picioarele pentru a-l face să se rotească.) Imaginea acestei mașini ne-a parvenit printr-o frescă descoperită la Pompei.

Scriitorul Diodor (sec. I e.n.), vorbind despre exploatarea minelor din Spania, spune*:

„Minerii dau deseori de rîuri subterane; (...). Este uimitor că ei reușesc să scoată toată apa cu ajutorul unor mașini egiptene, inventate de Arhimede din Siracuza în timpul călătoriei sale în Egipt. (...) Această mașină era construită atît de genial, încît permitea pomparea unor cantități imense de apă fără multă trudă, un întreg rîu subteran putea fi scos din adîncul pămîntului la suprafața lui. Bineînțeles, geniul lui Arhimede trebuie admirat nu numai pentru această

* Cităm după lucrarea lui S.I. Luria, *Arhimede*, Edit. științifică, 1952 — din care folosim și alte date sau citate în cadrul acestui capitol — pe care o recomandăm celor care ar dori informații mai ample.

invenție; îi datorăm multe alte invenții, încă mai mari și mai vestite în lumea întreagă".

Aplicarea pîrghiilor. Se construise în Siracuza o navă puternică; la lansarea ei în apă, eforturile directe ale oamenilor se dovedesc insuficiente. Arhimede construiește o mașină — probabil un sistem de pîrghii — cu care reușește să lanseze nava. Se consideră că tocmai cu acest prilej ar fi făcut el celebra exclamație: „dați-mi un punct de sprijin și voi mișca pămîntul". Uimiți, regele Hieron, concetățenii săi îl felicită cu entuziasm, iar Arhimede devine omul de încredere și de nădejde al țării sale.

Despre construirea sferei cerești. Este titlul unei lucrări scrise de Arhimede, care s-a pierdut. El a construit efectiv un aparat, sfera cerească, luat ca trofeu de către generalul roman Marcellus care a cucerit Siracuza în anul 212. Cicero (sec. 1 î.e.n.) a văzut acest aparat la un strănepot al lui Marcellus și spune despre el: „Minunea cea mare în invenția lui Arhimede stă în arta cu care el a știut să îmbine într-un singur sistem și să realizeze cu ajutorul mișcării de rotație singure, mișcări atît de felurite și revoluții atît de diferite ale diverselor astre. Cînd Gallus punea în mișcare „sfera", se putea observa cum, la fiecare rotație, Luna cedează locul Soarelui la orizontul Pămîntului, aidoma cum se întîmplă în fiecare zi pe cer; ca și pe cer, se puteau observa eclipsele solare, modul cum Luna pătrunde treptat în umbra Pămîntului..."

Arhimede își apără Patria

În cadrul războaielor între Roma și Cartagina, armate romane sub comanda lui Marcellus pornesc să cucerească Siracuza dar, datorită lui Arhimede, rapida cucerire scontată se transformă într-un umilitor asediu care va dura 3 ani...

Istoricii, obișnuiți să proslăvească fapte de arme, sînt acum în situația nouă de a proslăvi geniul.

Polibiu, scurtă vreme după evenimente, scrie:

„...romanii au stat sub zidurile cetății și au încercat toate vicleșugurile și toate actele de bravură dar nu s-au mai încumetat să încerce un nou asalt. Iată ce forță extraordinară poate avea un singur om, un singur talent. (...) romanii dispuneau de forțe însemnate, atît pe uscat cît și pe mare și nădăjduiau să ocupe cetatea de la primul asalt și ar fi reușit, dacă cineva l-ar fi înlăturat din mijlocul siracuzanilor pe acest moșneag".

Plutarh (50—125 e.n.):

«Dar iată că Arhimede pune în acțiune mașinile sale. Pedestrașii inamici sînt copleșiți cu tot felul de săgeți și de bolovani uriași, care zburau cu zgomot și cu mare iuțeală. Nimic nu putea să le stea împotrivă: îi răsturnau pe cei în care nimereau și stricau rîndurile atacanților. Deasupra corăbiilor, apăreau dintr-odată bîrne îndoite ca niște coarne. Unele din ele loveau corăbiile și le scufundau. Altele, apucau cu gheare de fier sau ciocuri asemănătoare cu ciocurile de cocostîrc provele corăbiilor, le ridicau în poziție verticală și apoi (prin îndepărtarea ciocului) le scufundau.

(...) Marcellus spunea: „Oare nu-i mai bine să încetăm lupta împotriva matematicianului Briareus*? El stă liniștit pe malul mării, răstoarnă vasele noastre și azvîrle dintr-o dată un număr atît de mare de săgeți, încît îi întrece pe giganții mitologici cei cu o sută de mîini". Într-adevăr, toți ceilalți siracuzani nu alcătuiau parcă decît corpul mașinilor lui Arhimede, el singur fiind sufletul care îi mișca și conducea totul...».

Să trecem acum de la istorie la legendă. Se spune că Arhimede ar fi aprins corăbiile dușmane și cu ajutorul unor oglinzi care concentrau razele solare. Să fie adevărat? Să arătăm că este, cel puțin, plauzibil, probabil. Cînd un geograf din zilele noastre vrea să arate că vechii locuitori ai Americii de Sud ar fi putut ajunge pe plute pînă în Insula Paștelui, face el însuși o asemenea plută și o asemenea călătorie. Ca să arătăm că Arhimede ar fi putut folosi oglinzile, să le folosim noi înșine — și-a spus învățatul Buffon, și el,

---

* Briareus, personaj mitologic cu 100 de mîini.

în 1747, a reuşit experienţa în preajma Parisului, cu atît mai mult este ea posibilă în Sicilia, unde e mai cald.

Arhimede, matematician... Nu numai. Comparaţi-l cu Tales care îşi face o glorie din a fi înfipt un băţ în pămînt şi a fi folosit o teoremă destul de banală; cu Pitagora, care proslăveşte pe zei pentru că i-au dezvăluit armonia poliedrelor regulate; cu Euclid care, în liniştea Muzeului, îşi redactează migălos, colecţia de teoreme. Sînt mari, cînd îi privim izolat, pe fiecare în parte. Pe cînd matematicianul militant, acest geniu multilateral şi viu care este Arhimede, este cred, cel mai de elită exemplar pe care l-a produs umanitatea.

Nu numai lucrările lui sînt o sursă de ştiinţă, de reflecţii, de meditaţie. Viaţa lui e cea mai mare din operele sale şi cea mai bogată sursă de meditaţii în problematica largă despre condiţia umană.



Prin trădarea unui siracuzan din partidul filoroman, romanii reuşesc în fine să intre în cetate şi, cu furia celor ţinuţi 3 ani sub zidurile ei, o devastează. Arhimede moare străpuns de lancea unui soldat care, înşelat de strălucirea instrumentelor de alamă lustruită ale lui Arhimede, crede că ele sînt de aur şi vrea să le jefuiască. Legenda, după care ucigaşul l-ar fi găsit făcînd probleme de geometrie pe nisip şi la cererea lui Arhimede: nu-mi atinge figurile (Noli tangere circulos meos !) s-ar fi înfuriat, este falsă şi revoltătoare. Ea s-a acreditat pe o bază psihologică; mentalitatea profanilor că un savant trebuie să fie distrat, precum şi pe baza unui mozaic reprezentînd, trei secole mai tîrziu, o astfel de scenă imaginată. Tot pe baza unui criteriu psihologic dar mult mai profund afirmăm falsitatea ei. Omul care a condus bătălia timp de 3 ani, omul care a stat în preajma maşinilor de război, de el inventate, şi a palpitat verificîndu-le funcţionarea şi efectele, omul care pentru a construi astfel de minunăţii a trebuit să li se consacre în întregime, cu trup şi suflet, acest om „nu prinde de veste" că au intrat duşmanii în cetate ! Acest om se ocupa cu o problemă platonică de geometrie,

cînd toată strădania lui se prăbuşea în jur ! Fals, revoltător de fals.

Plutarch, care relatează ambele versiuni, arată că Marcellus a fost foarte mîhnit la vestea morţii lui. Se poate. Dar care îi era mîhnirea? Nu cumva ideea că Arhimede viu, inteligenţa sa, ar fi fost o pradă de război cu mult mai valoroasă decît aparatele lui fără priceperea de a le folosi şi decît tot aurul şi avuţiile jefuite?

O legendă, reprodusă de un istoric arab spune că „romanii au ars 15 legături conţinînd scrierile sale". Deci l-au mai ucis o dată, distrugîndu-i opera, după ce îi uciseseră trupul. De ce nu le-au luat pe acestea ca pradă de război? Pentru că cele 15 legături conţineau mai mult lucrări teoretice pe care, în acea vreme, romanii nu le apreciau şi pentru că nu conţineau planurile maşinilor de război, singurele care i-ar fi interesat cu adevărat. Nu-şi dădeau seama ce pierd prin asta. Mulţi oameni după ei, s-au străduit şi se străduiesc încă să afle ce am pierdut noi, umanitatea toată, prin acest sacrilegiu.

Opera scrisă

Lucrările scrise, chiar dacă ne-am mărgini la acelea care nu s-au pierdut, acoperă o întinsă gamă de preocupări. În lista ce urmează nu le aşezăm cronologic, ci grupate după obiectul cercetării. Arhimede a scris:

1. În geometria plană. a) Despre măsura cercului, b) Despre cuadratura parabolei, c) Despre spirale.

2. În geometria în spaţiu. a) Despre sferă şi cilindru, b) Despre conoizi şi sferoizi.

3. În aritmetică. Numărarea firelor de nisip. Legată de scrierea numerelor mari este şi „problema taurilor".

4. În mecanică. a) Despre echilibrul planelor (două cărţi, cuprinzînd centre de greutate, pîrghii, echilibru etc.), b) Despre corpurile plutitoare (două cărţi, cuprinzînd şi celebrul principiu al lui Arhimede).

5. În astronomie. Despre construcția sferei cerești — singura lui lucrare scrisă, cu caracter tehnic, din păcate, pierdută.

6. În metodică. Despre metoda mecanică de rezolvare a problemelor de geometrie (sub forma unei scrisori către Eratostene).

7. În matematica distractivă, Arhimede s-a ocupat cu jocul de societate „stomahion", cu problema „aria cuțitului cojocarului", cu „solnița romană".

Precursorul fizicii matematice

Reluăm aici problema coroanei, care este astăzi printre exercițiile de algebră din cursul elementar — ca să ne dăm seama care era natura problemei atunci cînd s-a pus întîi și, pe cît posibil, care a fost procesul de gîndire prin care s-a descoperit soluția.

Deci: Hieron dă bijutierului său aur ca să-i facă o coroană și el i-o face. Apoi Hieron bănuiește că bijutierul l-a înșelat înlocuind o parte din aurul pe care l-a primit prin argint (care era și atunci mai ieftin) și prezentînd o coroană făcută, de aceeași greutate cu aurul pe care îl primise.

— Cum să fac, Arhimede, să aflu dacă în adevăr m-a înșelat și dacă da, oare mult aur va fi îndrăznit să sustragă? — va fi fost întrebarea lui Hieron.

Un alt consilier ar fi răspuns poate așa: pune-l la casne și va spune. Cînd însă consilierul este Arhimede, altfel de soluție se așteaptă de la el.

Într-o situație analogă, azi, răspunsul imediat ar fi: dă-o să-i facă o analiză *chimică* într-un laborator...

Nu-i bun nici acest răspuns: mai întîi pentru că, pe atunci, nici vorbă de chimie; în al doilea rînd, regele nu vrea să i se strice coroana.

Problema pusă lui Arhimede e grea pentru că nu are date; problemele care se fac astăzi în școală încep cu *se dă* cutare

şi cutare şi după aceea cer: să se afle... Elevul înţelege că trebuie să se folosească de acele date pentru a afla ce i se cere. Mai interesante ar fi nişte probleme altfel construite, nu cu „se dă" ci cu „caută tu ce-ţi trebuie, fă tu singur măsurătorile de care ai nevoe" ca să răspunzi la problemă. De acest al doilea tip este problema dată lui Arhimede. Iar el stă cu coroana în mînă, se uită la ea, își dă seama că trebuie s-o cîntărească, să vadă dacă trage la cîntar cît aurul primit — de aceasta şi-a dat seama şi Hieron şi-şi dă seama oricine, dar asta înseamnă, cum am zice noi, o ecuaţie şi avem nevoie de două.

Coroana nu poate fi stricată, topită ca să măsor direct cît aur, cît argint. Deci nu e o problemă de fizică *experimentală*.

Nu am nici *date*, care să le supun calculului — deci nu e o problemă de matematică pură.

Trebuie să fac nişte măsurători directe — asta înseamnă fizică — trebuie din ele, prin gîndire, să deduc rezultatul — asta înseamnă matematică; deci în ansamblu, e o problemă de *fizică-matematică*; e prima problemă de acest fel din istorie, în acest domeniu al cunoaşterii, fizica matematică, cel mai frumos din toate, pentru că experienţa singură nu-mi poate da răspunsul, nici gîndirea singură, ci numai o justă împletire între ele.

Apare aici *esenţa* noţiunii de ecuaţie (chiar dacă noţiunea în sine nu a fost încă definită), care înseamnă un fel de cunoaştere *indirectă* (nu măsor direct ce-mi trebuie, ci caut condiţiile de fapt din care gîndirea să deducă rezultatul dorit).

Să revenim la coroană pe care am lăsat-o în mîna lui Arhimede, care se uită gînditor la ea neştiind ce să-i facă. O lasă decepţionat din mînă şi pleacă la alte treburi. Dar problema, ca întrebare, stăruie în mintea lui; s-o cîntăresc, s-o cîntăresc... aude în sine un murmur în surdină, da, asta ştiu, s-o cîntăresc, dar ce altceva să-i mai fac?... Ce să-i mai fac? Acum admit şi eu că poate părea celor din jur *distrat*. Ei însă probabil nu văd o nuanţă, nu disting pe a fi distrat în sensul de a avea o atenţie împrăştiată şi nestabilă — deci

o insuficiență psihică — de a fi distrat în sensul de a fi *preocupat* de o problemă, care te atrage mai mult decît problemuțe minore ce nu te interesează — și care înseamnă o calitate psihică *pozitivă*.

Au trecut poate zile întregi colorate sumbru de neliniștea ignoranței; uneori iese la iveală un sentiment de resemnare — s-o las, nu se poate și gata; dar pe fondul resemnării și regretului de a nu fi izbutit, apare ca reacție și cîte o licărire de speranță... Totuși poate că ar exista o soluție... Și din nou aude un murmur: s-o cîntăresc, dar ce altceva să-i mai fac?...

Și survine celebra scenă cu baia. În fine, un moment de relaxare, mai scapă și el de obsesia problemei. Stă în baie și „se joacă". Ridică piciorul să se spele; îl lasă iar în apă, îl ridică iar; îi face plăcere că îl ridică mai ușor în apă — aproape că se ridică singur! — decît atunci cînd îl ridica prin aer. Și dintr-o dată, o legătură neașteptată între două fapte pînă atunci cu totul independente: 1) surdina... „s-o cîntăresc, dar ce altceva să-i mai fac?"... care pe moment tăcuse, 2) piciorul care se ridica din apă aproape singur.

Ce altceva să-i mai fac? Dac-aș cîntări-o în apă? Dintr-o dată, atenția se ascute la maxim, problema, din preocupare și neliniște qvasiuitată, devine tensiune. Cum s-o cîntăresc în apă? Ce rost are? Coroana se va lăsa la fund. Lemnul plutește pe apă. Nu aurul, nu argintul... Dar piciorul? Nici piciorul nu plutește. Se lasă la fund. Da, dar îl ridic *mai ușor*. Și o bucată de aur prin apă o ridic mai ușor. O împinge apa în sus. Cît de tare, cu ce forță? Un lemn mai mare, mai greu îl cufunzi decît pe unul mai mic. Apa îl împinge în sus mai tare, mai încet, după mărimea lui. Va să zică cu cît vrei să-i iei mai mult din spațiul ei, cu atît apa se opune mai tare. Parcă nu ar interesa-o greutatea corpului ce vine în ea, ci cît spațiu vrea el să-i răpească, volumul. Am să cîntăresc, am să verific; am impresia că așa e: că apa împinge în sus un corp cufundat în ea, micșorîndu-i greutatea și că forța de împingere, cantitatea cu care se mic-

șorează greutatea corpului este tocmai greutatea apei al cărui loc în spațiu l-a luat... Dac-ar fi așa, problema cu coroana e rezolvată...

Nu știm, și chiar dacă am ști cu greu s-ar putea zugrăvi, în ce fel s-au învălmășit gîndurile — întrebările, ipotezele, ezitările, raționamentele — în mintea lui Arhimede, în momentul cînd cele două fapte s-au alăturat și problema a devenit tensiune.

Știm însă, din experiență proprie, că, pe baza principiului lui Arhimede, problema devine simplă. Fiindcă sîntem obișnuiți cu noțiunea de densitate, mai mult: fiindcă știm că densitatea aurului este 19,3, iar a argintului 10,5, noi punem problema în ecuație — și putem face aceasta în mai multe moduri, de pildă:

Notînd cu x și y volumele de aur, respectiv argint în cm^3, avem:

$19{,}3\,x + 10{,}5\,y = G$ (masa coroanei, în grame, măsurată prin cîntărire)

$x + y = V$ (volumul, în cm^3, măsurat prin apa dislocuită)

Să nu ne închipuim că pentru Arhimede ar constitui un impediment faptul că nu are o carte cu un tabel de densități — le poate găsi cîntărind — sau faptul că nu a învățat în școală despre sisteme de ecuații — le poate înlocui prin raționament aritmetic direct. Dăm soluția aritmetică în termenii de azi. Să presupunem că $G = 405$ g și V (greutatea apei dislocuite) 26 grame. O bucată de aur curat cîntărește în aer de 19,3 ori cît volumul de apă pe care l-a dislocuit, iar una de argint de 10,5 ori. În cazul cînd coroana ar fi din aur curat, greutatea ei ar fi $19{,}3 \cdot 26 = 501{,}8$ g; mai mare decît $G = 405$ g, deci nu-i de aur curat. Dar cît argint are?

Dacă iau un cm^3 de aur (19,3 g) și îl înlocuiesc cu un cm^3 de argint (10,5 g), greutatea scade cu 8,8 g. Dar ea trebuie să scadă de la 501,8 g la 405 g, deci cu 96,8. Sînt atîția cm^3 de argint de cîte ori 8,8 g se cuprinde în 96,8 g, deci

11 g cm³. Greutatea argintului este 10,5 × 11 = 115,5 g iar restul, 289,5 g, este aur.



Nu știm cum a gîndit Arhimede *în detaliu* (probabil, întru cîtva apropiat de soluția ce o dăm noi aritmetic), dar știm — cu o siguranță relativă, de ordin psihologic — că nu a avut nevoie de detalii, că atunci cînd a întrevăzut posibilitatea de a avea o a doua condiție, problema era pentru el ca și rezolvată.

Momentul esențial al rezolvării nu este acela cînd se fac calcule și se obține rezultatul numeric. Esențială este *ideea* pe care se sprijină rezolvarea; ea e căutată printr-un travaliu conștient, apoi printr-o preocupare neaparentă, care dăinuie zile, uneori ani, și ea, ideea nu detaliul, apare brusc ca un fulger într-un moment de inspirație, cînd se surprinde o legătură ascunsă, surprinzătoare, emoționantă, cu un alt fenomen, ce păruse străin.

Am descris procesul descoperirii, căutînd să-l reconstituim prin imaginație. Pentru a ne da seama că este verosimil să se fi întîmplat așa (nu pretindem că *exact* așa și că *sigur* așa), să dăm cuvîntul celuilalt matematician universal, despre care spuneam că e supranumit *ultimul*, H. Poincaré — unul dintre puținii matematicieni mari care s-a preocupat, cu deosebită finețe, și cu aspectele psihologice ale activității matematice, cu procesul *invenției* în matematică, cu procesul *învățării* ei.

Poincaré povestește și analizează în ce mod a ajuns la una din marile sale creații. După ce arată că „...de 15 zile mă forțam să demonstrez că..." „...în fiecare zi m-așezam la masa de lucru, încercam un mare număr de combinații și nu ajungeam la nici un rezultat...", Poincaré relatează următoarea scenă:

„Peripețiile călătoriei m-au făcut să uit lucrările mele matematice: sosiți la Coutances, ne suirăm într-un omnibuz pentru nu știu ce plimbare; în momentul cînd puneam picio-

rul pe scară, îmi veni ideea (...). Nu făcui verificarea; nici n-aş fi avut timp căci, abia aşezat în omnibuz, reluai conversaţia începută, dar am avut de îndată o completă siguranţă."

Concepţia filozofică

Arhimede nu este un „filozof" în plan teoretic, ci un om de ştiinţă în deplinul înţeles al cuvîntului — ceea ce îl conduce la poziţii în problema cunoaşterii foarte juste, în esenţă de natura acelora preconizate astăzi de materialismul dialectic.

Deşi şcoala din Alexandria, unde Arhimede a studiat şi cu care menţine legături prin scrisori, este încă dominată de concepţia idealistă (e drept mai puţin tiranică, prin separarea geometriei de filozofie), el, ca om cu preocupări variate, printre care cele practice ocupă un loc important, nu se lasă antrenat de această concepţie. Platon în primul rînd, dar chiar şi Aristotel, care are un orizont mai larg, consideră mecanica „o activitate meşteşugărească, potrivită pentru un sclav, inutilă pentru filozofie".

Arhimede nu-şi alege obiectul de studiu prin prisma unei concepţii filozofice. El studiază tot ceea ce este demn de interesul omului viu. Un fizician este în general *materialist* în mod spontan, chiar dacă nu se ocupă şi în teorie cu filozofia materialistă.

În ce priveşte metoda de studiu, el reuşeşte să facă o sinteză superioară între metode cu caracter practic, quasiexperimental potrivite pentru descoperirea adevărului şi metoda gîndirii raţionale potrivită pentru demonstrarea lui riguroasă. Astfel, Arhimede deşi iniţial nu-l studiase pe filozoful materialist Democrit, ajunge la rezultate pe care şi acesta le descoperise — după cum recunoaşte ulterior într-o scrisoare — dar le fundamentează mai bine.

Eliberat de limitările artificiale ale concepţiei idealiste dar şi de o interpretare strîmtă, mecanicistă a concepţiei

materialiste (conform căreia și în geometrie figurile ar fi formate din „atomi" — de unde o așa-numită metodă a *indivizibilelor* în aflarea lungimilor, ariilor, volumelor, cu rezultate în general juste, dar nu destul de riguroase), Arhimede ajunge la un nivel net superior atît prin alegerea problemelor cît și prin metode.

Evrika

Gîndirea lui Arhimede nu este stînjenită de prejudecăți „filozofice", este a unui om viu, interesat de felurite probleme de viață, de știință.

Simțirea lui este de asemenea spontană, naturală, nefalsificată de „concepții" — și deci foarte interesantă ca fenomen psihic.

Există la unii oameni părerea că activitatea matematică este pur intelectuală, uscată și rece, lipsită de pulsația și palpitațiile fenomenelor vii. Este părerea acelora care nu au o experiență proprie, autentică asupra ei, care o privesc prin prisma deformantă a matematicii școlare de un anumit tip, a unei școli greșit înțelese, care în loc să deschidă poarta spre matematica vie, au transformat-o într-o obligație penibilă.

Există însă și mulți oameni care, încă de copii, intuiesc esența umană a activității matematice; căci, pentru aceasta, nu nivelul creației este important, ci actul în sine. O problemă elementară, dacă este *trăită*, provoacă o gamă de sentimente și o satisfacție, asemenea, dar la scară mai mică, cu cele date de un act de creație propriu-zis. Priviți copilul care se muncește necăjit cu o problemă: îi vine s-o lase dar atunci îi apare sentimentul unei umilințe, uneori și al unei ambiții, al unei competiții tacite: Petrescu va reuși s-o facă, eu nu? Priviți-l cum schimbă încercările cînd cu deznădejde, cînd cu înfrigurări de speranță. Priviți, mai ales, momentul cînd fața i se luminează, începe să lucreze înfrigurat dar

sigur, pentru ca la sfîrșit, confruntînd eventual și cu răspunsul din carte, să exclame cu o satisfacție specifică: *mi-a ieșit!* Comparați acum cu peripețiile de ordin sufletesc ale lui Arhimede în căutarea soluției la problema lui Hieron. Nu, activitatea matematică nu e de loc rece; o gamă de sentimente și emoții puternice trebuie s-o anime pentru ca ea să fie fructuoasă.

Mi-a ieșit, exclama copilul, satisfăcut. Legenda spune că atunci cînd Arhimede făcînd baie, a intuit brusc legea plutirii corpurilor și, prin ea, și soluția la problema cu coroana, entuziasmat a ieșit din baie, gol cum era, strigînd: Evrika, Evrika! (am găsit, am descoperit!). Evrika! Este rădăcina etimologică a cuvîntului *euristic*. Este simbolul scurt și evocator al întregii matematici euristice, ca și al oricărei invenții, al triumfului inteligenței în lupta ei necurmată cu necunoscutul. Din tot ce a făcut și trăit Arhimede, inclusiv ceea ce îi atribuie legendele, dacă nu ar rămîne decît acest unic cuvînt evrika, chiar și golit de conținutul concret, fără să mai știm la ce anume invenție s-a referit, el și-ar păstra o deosebită valoare de simbol, simbolul celei mai vii și autentice atitudini umane. Tocmai de aceea, ecoul lui prelungit peste veacuri ne înfioară și astăzi.

Ca să apară, izbucnind, acest evrika triumfător e necesar un preambul, uneori destul de prelung, de sforțări, de luptă nedecisă, de îndoieli chinuitoare împletite cu înfiripări de speranță; este necesar, în plus, ca acest efort să fie personal, tensiunea întreagă a propriei ființe. Evrika e un fel de împlîntare a steagului victoriei pe o redută îndelung asaltată.

Urmăriți timbrul emoțional al unei alte exclamații pe linia cunoașterii: aha! Este exclamația care traduce pe „am înțeles", „m-am dumerit", cînd unui om i se explică, *din afară*, ceva. O exclamație și ea umană, numeric mai frecventă decît evrika, dar emoțional mai ștearsă. Traduce o satisfacție — aceea de a fi aflat un lucru nou — dar ea e oarecum umbrită de regretul de a nu fi reușit singur, prin mijloace proprii.

Oamenii care rămîn afectiv incolori în fața procesului de cunoaștere sînt de compătimit, ei nu au ajuns în miezul viu

al lucrurilor. Autentici sînt oamenii care exclamă. Prin natura lucrurilor, cum spuneam, cea mai frecventă exclamație este „aha"! Dar fiecare om, cu adevărat om, trebuie să aibă și acțiuni, momente în care să exclame cu plenitudine și cu ascuțită satisfacție: evrika!



Realitatea psihică închisă în cuvîntul evrika, bucuria de a afla, o găsim și la Tales și la Pitagora, tradusă material printr-un alt simbol: jertfa adusă zeilor drept mulțumire pentru descoperirea unei teoreme. Dar pe un fond comun — emoția, entuziasmul pentru un plus de cunoaștere — două nuanțe distincte: evrika înseamnă am descoperit eu, sînt mulțumit pentru că procesul de gîndire petrecut în mintea mea a fost încununat de succes. Jertfa arată concepția că descoperirea s-ar datora și sprijinului unei puteri supranaturale din afară. Nu știu dacă e adevărat că Arhimede a ieșit din baie dezbrăcat la propriu; dar dezbrăcat de concepții mistice, om pur și simplu, așa cum l-a făcut natura, era.

Nu însă un om simplu, ci, dimpotrivă, foarte rafinat. El știa să prețuiască nu numai actul viu, dinamic, al descoperirii, ci și frumusețea interioară a unor adevăruri, armonia de genul aceleia atît de prețuită de către predecesorul său, Pitagora.

Propoziția care i-a plăcut mai mult din acest punct de vedere a fost faptul — simetric și simplu — că cilindrul circumscris sferei are aria o dată și jumătate cît a sferei, iar raportul volumelor același.

Sfera și cilindrul circumscris este tocmai figura care i-a fost săpată, ca omagiu, pe mormînt — tot astfel cum pe mormîntul unui poet se sapă două versuri din opera sa. Figuri, versuri care uneori amintesc mai mult de liniștea majestuoasă a morții decît de efervescența vieții acelui care acum odihnește sub piatra pe care ele au fost săpate...

Aflarea lungimilor, ariilor, volumelor — — probleme astăzi specifice calculului integral — ocupă un loc larg în opera lui Arhimede.

Metoda nu e la fel de generală ca cea de astăzi, diferă evident și prin notații, dar *ideea de bază* este aceeași: să se găsească valori aproximative prin lipsă și prin adaos a mărimii de calculat, care depind de un număr natural n, să se arate că atunci cînd n crește diferența între valoarea prin adaos și cea prin lipsă poate fi făcută oricît de mică, limita comună fiind astfel mărimea căutată.

Să ne amintim ca un prim exemplu, aflarea numărului π (raportul între lungimea cercului și diametrul lui), chestiune studiată, după metoda lui Arhimede, și în manualele de liceu. Se consideră poligoane regulate înscrise și circumscrise cercului; cînd n, numărul laturilor crește, perimetrele poligoanelor înscrise cresc, ale celor circumscrise descresc, limita comună fiind lungimea cercului. Arhimede, luînd $n = 96$, găsește:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

ceea ce dă două zecimale exacte.

Astăzi, cu ajutorul seriilor (v. cap. VII) există metode mai rapide pentru calculul lui π, deci care ne dau ușor mult mai multe zecimale, ceea ce însă nu infirmă, ci numai completează rezultatul lui Arhimede.

Să considerăm însă și un exemplu nou — încă nestudiat de noi — care deci ne poate da mai mult de gîndit, spirala lui Arhimede. Ea se definește ca linia descrisă de un punct M care se mișcă uniform pe semidreapta Ox', în timp ce aceasta se rotește tot uniform în jurul punctului O (fig. 19). Fie $\rho = OM$ și $\theta = x'Ox$, unde Ox este poziția inițială a semidreptei. Avem deci $\rho = vt$, $\theta = \omega t$ (v, ω fiind viteza mișcării pe dreaptă, respectiv de rotație). Rezultă $\rho = \frac{v}{\omega}\theta$, $\rho = a \cdot \theta$. Curba poate fi trasată pe baza definiției, dînd lui θ cîteva

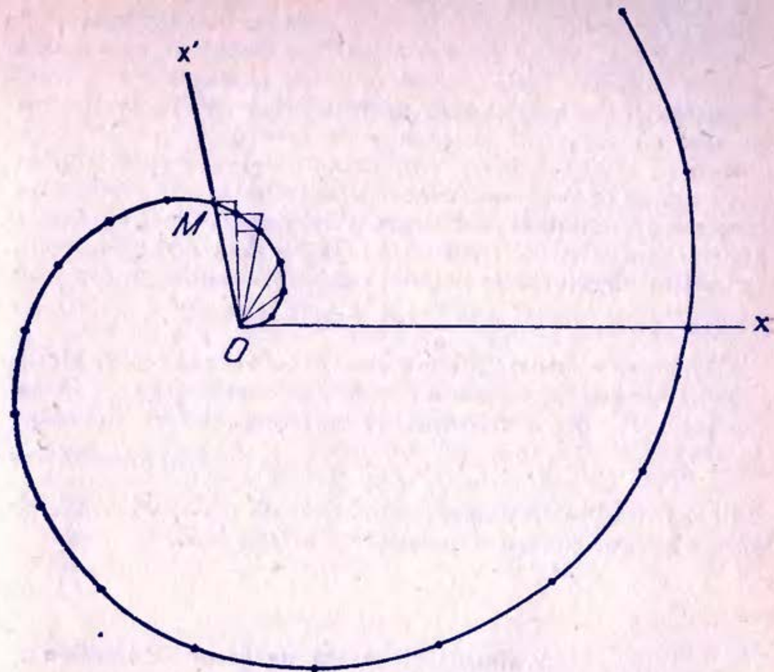


Fig. 19

valori, fixînd punctele corespunzătoare şi imaginînd mişcarea pentru valorile intermediare. Obţinem figura 19, unde s-au dat lui θ valori de la 0° la 400° şi care trebuie completată cu imaginaţia (pentru θ de la 360° la 720°, o nouă spiră mai largă etc.).

Originalitatea lui Arhimede se vede şi aici în obiectul de studiu. Pe cînd predecesorii săi consideră în general figuri *statice* (un anumit dinamism apare în construcţiile *mecanice* ale problemelor celebre), Arhimede *compune* două mişcări simple, putînd fi considerat, prin aceasta, şi un precursor al *cinematicii*.

Aici ne interesează însă problema de calcul integral. Să aflăm aria măturată pînă la un moment dat de raza OM (haşurată fig. 19). Deoarece grecii nu lucrează cu unităţi fixe de măsură (m^2, cm^3 etc.), ci cu rapoarte de arii, să raportăm şi noi aria căutată la aria (cunoscută) a sectorului de cerc cu raza OM şi unghiul la centru θ.

Cum să calculăm aria? Vom căuta o arie (pe care să ştim a o calcula) care să aproximeze aria căutată prin lipsă, alta care s-o aproximeze prin adaos. Aici este natural ca aceste arii aproximative să le reducem la sectoare de cerc. De aceea, împărţim unghiul θ în n părţi egale şi considerăm sectoare de cerc mici, de unghi $\frac{\theta}{n}$, ca cele din figură.

Ghicim că cititorul preferă să reconstituie el însuşi gîndirea lui Arhimede, de aceea oprim expunerea aici şi îl lăsăm s-o facă. Îl prevenim totuşi că va avea nevoie de suma $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, pe care Arhimede trebuie s-o stabilească singur, printr-o lemă geometrică, dar pe care cititorul nostru o cunoaşte din algebră.

Arhimede îi învaţă pe greci să numere

Învăţămintele lui Arhimede din mecanică, geometrie, calcul integral sînt adresate umanităţii. Cele din aritmetică numai grecilor, dar — ca fapt istoric — e interesant să ne oprim puţin şi asupra lor.

În adevăr, omenirea învaţă să numere din alte surse, de la arabi. Grecii, excelenţi cercetători în geometrie, sînt destul de inabili în scrierea numerelor (proprietăţile abstracte ale numerelor sînt studiate, ceea ce presupune o mare ascuţime cînd nu ştii să le scrii). Pentru scrierea numerelor, au un sistem greoi, nu au *cifre*, fiecare literă a alfabetului serveşte şi pentru a desemna cîte un număr, se pot alătura litere etc. dar — acesta-i aspectul important — pînă la urmă ei

nu pot scrie decît numerele pînă la 10^8. Cum se explică acest decalaj între progresele geometriei și starea rudimentară a aritmeticii calculatorie? Tocmai prin disprețul idealiștilor pentru îndeletnicirile practice, inclusiv deci pentru calculul numeric.

De ce ar fi nevoie de numere mai mari decît 10^8?

Este interesant că, în această chestiune, pozițiile se inversează: idealiștii se plasează pe poziția practicii înguste afirmînd: e destul pînă la 10^8, iar Arhimede, fizicianul, tehnicianul susține teza care ar părea pe moment idealistă: nu avem nevoie, dar este bine și e natural, să știm să scriem și să concepem numere *oricît de mari*. E din cauză că idealiștii privesc practica în afara științei „pure"; e din cauză că Arhimede are o gîndire dialectică înaltă prin care intuiește, prețuiește și valoarea gîndirii abstracte.

O primă lucrare a lui Arhimede despre principiile numerației s-a pierdut (n-o fi fost oare printre cele 15 suluri arse de „cuceritori", de care am vorbit?). Lucrarea cunoscută sub numele „Numărul firelor de nisip" este, probabil, o completare la prima și un răspuns la obiecțiile care i se vor fi făcut.

Ca bun pedagog, înainte de a ajunge la numere oricît de mari, Arhimede vrea să dea exemple de necesitatea de a ști să scrii numere mai mari decît cele ce se puteau scrie atunci.

Oamenii simpli, spune el, își închipuie că nisipul de pe plajele Siciliei are atît de multe fire încît nu se poate scrie numărul lor. În continuare, pentru a-și ilustra metoda, el arată că putem scrie un număr mult mai mare ca acesta: numărul firelor de nisip care încap în „tot universul", înțelegînd prin aceasta o sferă care are ca centru Pămîntul și ca rază distanța pînă la Soare. Ideea este, astăzi, simplă. Deoarece știm să scriem numere pînă la 10^8, vom număra grupe de cîte 10^8 unități și vom putea scrie 10^8 numere de astfel de grupe — el le numește din a doua octavă — adică numere pînă la $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ unități. Numărînd grupe de cîte 10^{16} unități, vom putea număra pînă la 10^8

astfel de grupe, adică pînă la $10^8 \cdot 10^{16} = 10^{24}$ etc. Este ideea de bază a sistemului nostru de a scrie numerele numai că baza de numerație în loc de 10 este, la el, 10^8.

Calculînd, cu datele pe care le are, numărul firelor de nisip „din univers" găsește unul de ordinul 10^{63}.

Între Arhimede și Apollonius are loc o polemică ce are și un substrat politic: Apollonius aparținea curții regelui din Pergam, aliat al Romei, iar Roma este adversara Siracuzei. Este probabil că tocmai în cadrul acestei polemici pune Arhimede noua lui problemă, care face necesare numerele foarte mari, așa-numita *problemă a taurilor*, care însă necesită și o foarte mare inteligență și este pusă tocmai ca o provocare, ca o sfidare a adversarului — provocare cu care începe chiar enunțul problemei (problema este în versuri și Arhimede afirmă, în glumă, că ea ar fi fost găsită pe o inscripție veche):

Dacă ești înțelept, socotește, străine, ascuțindu-ți
Mintea, cîte vaci și cîți tauri are Soarele
Cîte turme pășteau în văile răcoroasei Sicilii...

Apoi pune o serie de condiții pentru cele 8 necunoscute (vaci de 4 culori, tauri de 4 culori) pentru a încheia:

Dacă vei putea găsi toate acestea
Mergi înainte trufaș, voios de marea-ți izbîndă
Cel mai de seamă din toți înțelepții vei fi.

Problema a fost rezolvată de moderni (este vorba de un sistem de ecuații). Prima parte a problemei conduce la o soluție accesibilă: numărul total al vitelor, 50 389 073. Problema în întregul ei conduce la un număr atît de mare (s-ar scrie azi cu 206 545 cifre) încît nu putea fi exprimat în sistemul de numerație propus de Apollonius.

Joc — matematică

Jocul „stomahion" — probabil practicat ca distracție la curtea din Siracuza și căruia Arhimede i-a consacrat o mică lucrare — consta din așezarea a 14 plăci de fildeș în așa fel ca să formeze un patrat. Plăcile erau astfel tăiate încît să existe mai multe soluții, precum și unele false soluții, adică așezări care erau „aproape" patrate și numai prin raționamente — după cum a arătat Arhimede — se putea dovedi că nu sînt soluții exacte. Căutarea soluțiilor era un amuzament. Cînd însă căutarea soluțiilor nu se face pur empiric, prin așezări întîmplătoare, ci prin așezări ghidate și de raționament, acest amuzament devine de ordin superior; avem în acest caz un joc-matematic și el trebuie încorporat matematicii propriu-zise. Astfel de jocuri apar în cărți care se intitulează obișnuit *matematică distractivă*. Mi se pare că este un titlu prea larg; nu numai jocurile, multe probleme „serioase", aproape întreaga matematică este sau ar trebui să fie dintr-un anumit punct de vedere *și* distractivă. Nenumărate demonstrații prin arii ale teoremei lui Pitagora, din care am amintit cîteva, nu sînt în esență foarte asemănătoare cu jocul stomahion?

Granița între joc de inteligență și matematică este foarte neprecisă. Vom întîlni mai tîrziu — în capitolul Euler — exemple, în acest sens, și mai semnificative.

Invenție — inscripție — comunicare

Trei aspecte ale matematicii, cu structuri diferite, deși legate între ele:

1. *Invenție*. Am mai spus: descoperirea unei proprietăți noi se face printr-un proces de gîndire dialectică, adesea complex, în care raționamentul logic este doar una din componente; alături de el intervine intuiția, încercări quasi-

experimentale, imaginația, „inspirația", și nu rareori... întîmplarea.

2. *Inscripție.* După ce adevărul a fost găsit, trebuie să i se dea o demonstrație riguroasă, în care logica este aspectul esențial; demonstrația este tradusă în cuvinte, într-o formă sistematică, *succintă*, cristalizată — o formă care seamănă cu o inscripție solemnă în piatră.

3. *Comunicare.* Ce prezentăm și cum, oamenilor care *învață* matematica făcută de alții? Aici nu s-a găsit calea care să fie și destul de scurtă — economică în timp — și, totodată, destul de rodnică: să asigure și cunoașterea în sine a faptelor matematice (definiții, enunțuri, demonstrații), dar și *înțelegerea* — înțelegerea în adîncime, priceperea — rostului lor, să asigure și aspectul educativ: învățăcelul să fie în situația de *a aprecia valoarea* acestor fapte și a prinde el însuși gustul cercetării, aptitudinile cercetării.

a) Unii învățători prezintă inscripția; învățăcelul este pus *să o descifreze*. Numai unii reușesc să facă acest lucru; dintre aceștia, un procent infim reușesc să depășească aspectul pur logic, să priceapă dedesubturile lui umane;

b) alți învățători prezintă un pretins proces inventiv, așa cum și-l imaginează ei, încărcat de atîtea considerații adiacente și inutile, încît învățăcelul, încurcat, nu mai ajunge la faza de cristalizare, de gîndire concentrată, esențială în matematică;

c) alți învățători — care au arta de a învăța din instinct și nu din cărți uscate de pedagogie — își dau seama că o condiție esențială este ca învățăcelul să gîndească cu capul său, prin optica sa proprie, atît procesul descoperirii cît și cristalul final.

Matematica nu se învață, se redescoperă. Rolul învățătorului este acela de a declanșa acțiunea de redescoperire, de a o susține și călăuzi cu măsură.

Euclid se află, cum am văzut, în poziția *a*; de aceea considerăm opera lui ca nepedagogică.

Arhimede (ca și celălalt matematician universal de care am amintit, Poincaré) se află pe poziția *c*. Puține fapte

istorice îndreptăţesc această afirmaţie; puţine dar, considerăm, semnificative.

Din scrisoarea către Eratostene:

„Arhimede îi urează sănătate lui Eratostene. Ţi-am trimis mai înainte cîteva dintre teoremele găsite de mine, comunicîndu-ţi numai concluziile şi propunîndu-ţi să le găseşti singur demonstraţiile..."

Din scrisoarea către Dositeu:

„Arhimede îi doreşte sănătate lui Dositeu. Cea mai mare parte dintre teoremele pe care le-am trimis lui Conon, ale căror demonstraţii mă rogi în fiecare scrisoare să ţi le comunic, au fost demonstrate în lucrările mele, pe care ţi le-a adus Heraclid. Cîteva demonstraţii sînt cuprinse în cartea pe care ţi-o trimit acum. Să nu te miri că am întîrziat atît de mult cu publicarea acestor demonstraţii. Am vrut mai întîi să comunic aceste teoreme oamenilor care se ocupă cu matematica şi care ar fi vrut să încerce să le demonstreze singuri."

Să arătăm acum că Arhimede nu se mărgineşte *să provoace* activitatea proprie a celui căruia i se adresează, doreşte să-i fie şi călăuză, o călăuză luminată care are în vedere şi drumul, adică invenţia, şi capătul drumului, inscripţia.

Din epistola către Eratostene despre metoda mecanică de rezolvare a problemelor geometrice:

„... Să expun şi să-ţi explic în această carte o metodă specială, mulţumită căreia ai să capeţi un bun mijloc ajutător pentru *cercetarea* cîtorva probleme matematice cu ajutorul mecanicii. După convingerea mea adîncă, această metodă este la fel de utilă şi pentru demonstrarea teoremelor: multe fapte mi-au devenit pentru prima dată clare datorită metodei mecanice, *după care a trebuit să le demonstrez însă pe cale geometrică, deoarece metoda indicată nu oferă demonstraţii riguroase.* Fireşte, *e mai uşor să găseşti o demonstraţie riguroasă după ce ai căpătat, cu ajutorul acestei metode, o oarecare orientare în problemă.*

(...) am convingerea că procedînd astfel, fac un serviciu însemnat matematicii: consider că mulți dintre contemporanii sau urmașii mei, după ce vor fi cunoscut această metodă, vor fi în stare să găsească noi teoreme, la care eu nu am ajuns."

Doi titani: Euclid, Arhimede

Perspectiva timpului, măsurat în milenii, a șters detaliile, oferind esența.

Euclid a avut și el preocupări euristice sau practice; rezultă aceasta din opere ale căror titluri au fost amintite de istorici vechi, dar care s-au pierdut: lucrări de optică și de muzică, o lucrare intitulată *Pseudaria*, cu îndrumări și exerciții pentru studiul geometriei. Nu acestea îl caracterizează. Din punctul de privire situat la 2 000 de ani distanță, nu se mai vede decît această operă măreață, *Elementele*; nepieritoare operă, durată parcă în marmură. Oare nu este ea înrudită, în esență — deși de alt gen — cu frumusețea maiestuoasă a operelor durate propriu-zis în marmură, a templelor, a statuilor care au făcut gloria vechii Elade? Oare acest monument, *Elementele*, dedicat frumosului abstract, pur, nu-și află o explicație și în climatul general de cult al frumosului, în care s-a născut?

Euclid se identifică astăzi cu opera lui care înfățișează numai un aspect înghețat, al matematicii: matematica-monument; matematica-inscripție.

În ciuda timpului și a imenselor lui uitări, imaginea intitulată Arhimede este a unui om, a unui om viu, plin de efervescență, cu multiple preocupări, cu minunate realizări, a unui om care „concretizează" noțiunea de om, însumînd calitățile, duse la maxim, care caracterizează această specie.

Pasiunea pentru tehnică și manifestarea din plin a ingeniozității practice, concepția materialistă împletită cu o gîndire dialectică cuprinzătoare, pasiunea de a descoperi, vădită în exclamația cu o semnificație atît de adînc umană,

evrika, varietatea de preocupări (de la apărarea cetăţii pînă la jocul de societate, de la frumuseţea pură a relaţiei între cilindru şi sfera înscrisă pînă la folosirea pîrghiilor pentru a afla aria unui segment de parabolă), originalitatea acestor preocupări, contactul de idei, viu, cu alţi oameni (de la aprecieri elogioase pentru Conon pînă la împunsături ironice la adresa lui Apollonius, stimularea gîndirii altora, înţeleapta ei îndrumare) — totul întăreşte această imagine de om la maxim, care ne îndeamnă să-l privim şi astăzi, în ciuda distanţei, cu căldură şi cu simpatie, care ne îndeamnă şi ne ajută să medităm, prin prisma acestui model concret, la ce înseamnă în mod esenţial a fi om.

Lecţia istoriei

S-a spus că „istoria este făclia trecutului pusă în mîna prezentului, pentru a lumina viitorul."

Pentru etapa actuală de dezvoltare a matematicii, ca şi a pedagogiei matematicii, momentul istoric cel mai sugestiv este secolul de aur. Nu este vorba numai de o apropiere din punct de vedere cantitativ: cel mai înfloritor secol al antichităţii cu secolul în care matematica a ajuns uimitor de bogată şi diversă. Este vorba şi de înrudiri de structură, ca şi de problema *sensului* activităţii matematice.

Euclid vine după trei secole de cercetări euristice şi îşi ia ca sarcină sistematizarea geometriei într-un sistem logic-deductiv.

Sîntem astăzi la distanţă de exact 300 de ani de la descoperirea calculului integral şi diferenţial. În aceste trei secole s-au făcut extrem de numeroase cercetări, în special în Analiză, dar şi în alte domenii ale matematicii — cercetări nu totdeauna riguroase, dar mereu interesante şi fructuoase în aplicaţii; în plin proces euristic, cu atenţia şi entuziasmul îndreptat spre nou, chestiunea fundamentării riguroase a rămas în umbră.

A venit momentul unei sistematizări, al reconsiderării imensului material acumulat, al așezării lui în construcții pur logice, riguroase.

Fundamentarea logică, riguroasă și generală, este una din axele principale ale matematicii moderne.

Corespunzător acestui caracter științific, în pedagogie domină concepția limitării la matematica-inscripție.

Lecția lui Euclid, atît în partea ei științifică pozitivă, cît și în partea ei pedagogică, negativă este foarte bine învățată.

Mai puțin, marea lecție a lui Arhimede. Căci există la unii matematicieni de astăzi tendința de a absolutiza aspectul matematica-sistem logic, de a limita matematica la acest aspect util dar parțial al ei, de a o izola de preocupări euristice și aplicative, de procesul viu al cunoașterii. Ceea ce se repercutează și asupra învățămîntului matematic, prin aceeași tendință de a-l axa, poate chiar a-l limita, pe matematica axiomatică, cu ignorarea, chiar disprețul a ceea ce ei numesc „matematica naivă".

De aceea lecția lui Arhimede este actuală. Sînt sigur că matematicienii viitorului — printre ei și cititori ai însemnărilor de față — vor înțelege matematica în sensul ei viu, ca un fenomen de cultură în care fiecare din componente — meșteșug, știință, artă — își are rostul ei, farmecul ei, rostul major și un farmec nou revenind ansamblului însuși.

Cicero, două secole după moartea lui Arhimede, vizitînd Sicilia, îi caută mormîntul — călăuzit de faptul că știa despre sfera-cilindru săpate pe el — și îl găsește năpădit de buruieni. Între timp, romanii deveniseră mai iubitori de cultură,— cel puțin unii, și cel puțin ca o distincție care se poartă — ceea ce îi dă dreptul lui Cicero să reproșeze localnicilor că au uitat pînă și „locul unde se afla mormîntul celui mai mare dintre cetățenii Siracuzei" și să afirme cu falsă modestie că „a trebuit să vină un om din micul orășel Arpinus, ca să-l descopere !"

Mai mult decît descoperirea mormîntului, descoperirea vieții și a adîncilor ei semnificații este utilă etapei de față a urmașilor lui Arhimede.

Capitolul V

ÎNTRE MATEMATICA ANTICĂ ȘI CEA DIN EPOCA MODERNĂ

Ritmuri

Dacă am fi pitagoricieni, ne-ar plăcea să vedem în curba de evoluție a matematicii o anumită regularitate, dacă nu o progresie aritmetică sau geometrică, măcar una muzicală, dacă nu o mișcare uniformă, măcar uniform accelerată. În fapt, o schimbare de ritm impresionantă. Primele 16 secole ale erei noastre nu aduc științei cît un singur secol, cît secolul de aur care precede această perioadă sau cît secolul 17 care îi urmează. De ce oare?

Materialul uman este, potențial, același. Nu-i de admis că în secolul 3 î.e.n., apar mai mulți oameni — genii înăscute, că în secolele 17 și 18 apar cu mult mai mulți, iar în lunga perioadă situată între, un joc capricios al eredității face să sece izvorul talentelor. Explicația ar trebui căutată mai curînd în complexul de forțe care înlesnește sau frînează trecerea energiei psihice din starea potențială în cea manifestă; forțe de ordin social — de aceea, complexe — care influențează puternic, deși în mod neaparent, această activitate, ce pare uneori complet detașată de împrejurările exterioare și axată mai mult pe legi psihologice ca aceea a plăcerii de a gîndi.

Ritmul ni se pare prea lent. În ansamblu, aportul acestei perioade își are importanța lui. Îl vom schița pe scurt.

Se păstrează Elementele lui Euclid

În școala din Alexandria geometria continuă să progreseze prin lucrări meritorii, dar oarecum de detaliu — mai mult probleme, decît idei. Cucerirea Egiptului de către romani (30 î.e.n.) aduce o eclipsă — Universitatea este, pentru un timp, închisă — cucerirea de către arabi (641) marchează sfîrșitul așa-numitei „a doua școală din Alexandria".

Cînd arabii au dat ordin să se ardă biblioteca, protestele au fost atît de energice, încît au ajuns la califul Omar. Răspunsul lui a cîștigat o tristă celebritate: „Operele de care vorbiți — dacă sînt conforme cu *Coranul*, sînt inutile; iar dacă sînt contrare, ele sînt vătămătoare; în ambele cazuri, trebuie distruse".

Arabii înșiși — odată trecută orbirea războiului — vor regreta această pierdere și vor căuta să o repare.

Viața *Elementelor* în continuare? Intră, am putea zice, în stare de hibernare. Nu se dezvoltă, nu activează. Dar cel puțin nu moare... În timp ce din multe alte opere vechi nu ni s-a păstrat decît titlul (indirect, prin citarea lui în opere nedispărute), există în muzee numeroase manuscrise reprezentînd copii după *Elemente* (numai în Biblioteca din Paris, 22 !). Nu sînt identice; cei ce copiau au făcut adnotări, mici modificări, comentarii. Dar sînt atît de numeroase încît se poate reconstitui originalul (acesta pierdut, probabil, în 641).

Cine sînt păstrătorii? Arabii și mînăstirile.

Arabii. Impulsul lor spre știință este dat, se pare, întîi de medicină. După ce au trăit mai mult pe cal, în pustiu, cînd se stabilesc în orașele pe care le-au cucerit, apare o situație ciudată și neliniștitoare: boli — o serie de boli pe care nu le cunoscuseră înainte. Poate și microbiene, poate și datorite unei schimbări de mediu, de fel de viață. Unde să caute leacul, de vreme ce Coranul — ce părea suficient în 641 — se dovedește și el neputincios? În știința grecilor

pînă acum desconsiderată. Către anul 800 se traduc din grecește lucrări medicale: Hipocrate, Aristot, Galen. Apoi, impulsul fiind dat, se traduc și altele. La sfîrșitul secolului al IX-lea arabii sînt în posesia unor traduceri din Euclid, Arhimede, Apollonius, Ptolemeu. Unele din aceste opere ne-au parvenit numai prin intermediul traducerilor arabe. Claudiu Ptolemeu (sec. II e.n.) este autorul unei opere astronomice — cu multă autoritate în Evul mediu — cunoscută sub numele *Almagestul* — un nume arab care deformează titlul original.

Mînăstirile. Forurile oficiale creștine sînt preocupate de problema *calendarului*, în special în legătură cu fixarea datei Paștelui (variabilă: prima duminică după luna plină, după echinocțiul de primăvară). Dar un calendar necesită cunoștințe de astronomie, iar acestea cunoștințe de geometrie. Așa se explică de ce multe copii din Euclid au fost descoperite în mînăstiri.

Se păstrează cartea de geometrie, dar se pierde spiritul geometric. În general, în această perioadă, cultură înseamnă mai mult prosternare în fața unor texte considerate ca autoritate în materie, cel mult *comentarea* literei lor, cu efortul de a le înțelege, și mai puțin sau de loc activitatea axată pe descoperirea adevărului. Atitudinea față de Cartea sfîntă — pentru unii Biblia, pentru alții Coranul sau Talmudul — în esență axată pe *crede și nu cerceta* și pe venerația față de autori, Carte care dă *învățături*, nu invitații la gîndire este imitată, de la sine, și față de cărți „profane". Cîtă inteligență și cîte discuții s-au risipit pentru a se interpreta *un anumit cuvînt* din Talmud sau din Biblie ! Aceeași risipă de inteligență pentru a interpreta pe Aristot, care, în Evul mediu, devine cea mai mare autoritate în știință.

Biserica, începînd din secolul al XIII-lea, îl recunoaște pe Aristot, și-l apropie. De ce? Pentru că sistemul său este compatibil în multe linii mari cu dogma creștină; oamenii începeau să-și pună probleme asupra *naturii* ; tocmai adoptînd pe Aristot ca autoritate indiscutabilă, Biserica înăbușea spiritul cercetării libere.

Într-un astfel de climat, la ce servește Euclid? Cel mult *să-l înveți*, respectîndu-l. Un fapt semnificativ: încă de la începutul secolului al VI-lea, Boetius dă o carte de geometrie, în care sînt puse *numai enunțuri* de teoreme din Euclid. Demonstrații dă numai la primele trei teoreme, *în anexă*, ca să vadă cititorul că poate avea încredere în autor. Pentru ei enunțul — un fel de „învățătură" — e important. O carte de geometrie fără demonstrații! Bazată pe „încredere", pe prestigiul autorului!

Cel puțin, în geometrie nu se ajunge la contradicții. Cu mult mai ciudată este situația în fizică, inclusiv în cel mai simplu capitol al ei, Mecanica. Ceea ce spune Aristot e „sfînt". Chiar dacă acest ilustru filozof este contrazis de experiența curentă, de ceea ce se vede cu ochii.

Abia la începutul secolului al XVII-lea autoritatea textelor este negată în numele experienței și rațiunii. Ca să ne dăm seama cît de puternică era, trebuie să ne amintim lupta dramatică a lui Galileo Galilei. Primele atacuri împotriva lui Aristot le dă de la catedra Universității din Padova, în fața unui auditor imens, entuziast — stîrnind însă și o reacție violentă din partea apărătorilor lui Aristot. Galilei îi scria lui Kepler:

„Acești oameni consideră că filozofia este o carte în genul Eneidei și Odiseei și că adevărul trebuie căutat nu în natură ci pe calea confruntării textelor."

Iar în 1616 el dă la iveală *Dialogul despre cele două sisteme ale lumii*, conceput ca o convorbire între trei persoane: Sagredo, Salviati, Simplicio, din care cităm:

«Salviati. ...dacă Aristotel ar vedea noutățile descoperite pe firmament, el nu ar fi gata să-și schimbe părerea, să-și modifice cărțile și să se alăture unei doctrine mai înțelepte, respingînd de la sine pe cei cu mintea atît de săracă și cu firea atît de temătoare încît se încăpățînează să susțină citatele lui...?

Simplicio. Dar dacă părăsim pe Aristotel, cine ne poate fi îndrumător în filozofie? Numiți voi vreun alt autor.»[1]

---

[1] Citat după Ștefan Bălan, *Galileo Galilei*, Ed. tehnică, 1957.

Se cunoaşte calvarul lui Galilei, culminînd cu procesul pe care i-l face inchiziţia; ultimul interogatoriu, în 21 iunie 1633, i se ia în sala de tortură. Iar în sentinţă se spune:

«...te-ai făcut vinovat în faţa acestui Sfînt Oficiu de erezie, anume de a fi susţinut şi crezut doctrina falsă şi contrară celei din Sfintele Scripturi (...) că pămîntul se mişcă şi nu e centrul lumii (...)

(...) ordonăm să fie interzisă publicarea cărţii Dialogurile lui Galileo Galilei.

Acest Sfînt Oficiu te condamnă la închisoare şi îţi impune drept pocăinţă (...).»

Construcţia algebrei elementare

Este al doilea aport — de astă dată creator — al acestei perioade. După ce ne-am amintit de ce natură era „spiritul ştiinţific" dominant al acestei epoci, nu ne mai mirăm de încetineala progresului matematicii, ci ne mirăm că, într-un astfel de climat, a fost totuşi posibil un progres substanţial, într-o direcţie nouă, a algebrei.

Explicaţia stă în faptul că aritmetica, în primul rînd — nu ca teorie a numerelor „perfecte", ci ca reguli de calcul practic — algebra în al doilea rînd — pe linia perfecţionării aritmeticii — nu constituie ştiinţe platonice făcute de „amorul artei", legate de cultura livrescă, filozofică, ci ştiinţe legate direct de ocupaţiile oamenilor, deci o *necesitate de viaţă* imediată.

Este demn de subliniat că cele mai importante cunoştinţe în acest domeniu nu sînt opera unui mare matematician sau filozof. Autorul este anonim, mai bine spus autorul este poporul, oamenii care muncesc practic: aşa cum poezia populară precede şi pregăteşte pe cea cultă, tot astfel un fel de aritmetică populară precede şi dă fundament pentru dezvoltarea matematicii propriu-zise.

O a doua explicaţie ţine de faptul că noţiunile fundamentale, ca şi unele reguli derivate din ele vin din Asia, unde tirania textelor religioase în materie de ştiinţă nu se face simţită într-o măsură atît de mare.

Cel mai preţios dar al matematicii populare este *sistemul poziţional de numeraţie* — acel pe care îl folosim acum. În acest sistem o cifră arată două lucruri: prin *poziţia* ei ce fel de grupe (de unităţi, zeci, sute etc.) numără; prin valoarea ei cîte grupe sînt. Esenţială pentru acest sistem poziţional este evident şi cifra zero.

Sîntem atît de obişnuiţi cu el, încît nu-i mai apreciem valoarea. Dar ia să ne imaginăm că am fi rămas la cifrele romane; să ne imaginăm — e greu şi de imaginat d-apoi de lucrat efectiv! — că am face calcule cu astfel de cifre. Abia prin această comparaţie — ţinînd seama ce mulţime imensă de calcule numerice intervin în practică, în tehnică, în ştiinţă — simţim importanţa colosală a descoperirii sistemului poziţional.

Laplace spune despre ea: „idee profundă şi importantă care ne pare acum atît de simplă încît nu recunoaştem adevăratul ei merit, dar chiar simplitatea ei, marea uşurinţă pe care a introdus-o în toate calculele, situează aritmetica printre cele mai utile invenţii".

Acest sistem a apărut la popoarele din India, în jurul primului secol, fiind în esenţă traducerea practicii socotitului cu ajutorul abacului — unde pe fiecare sîrmă-coloană se pun atîtea bile cît arată cifra de ordinul respectiv. Baza 10 s-a impus de la sine, datorată faptului că oamenii au învăţat să numere pe degete.

Sistemul este adoptat de arabi prin secolul al VIII-lea, datorită relaţiilor comerciale pe care le au ei cu India.

Răspîndirea lui în Europa se face mai tîrziu, prin relaţiile comerciale cu Orientul şi în luptă cu concepţii retrograde. El apare întîi în Italia, ale cărei cetăţi făceau atunci comerţul cel mai activ. O monedă din Sicilia, din anul 1134, este prima piesă în care se folosesc cifrele *arabe*. Un edict din 1300 interzicea bancherilor din Florenţa să folosească simbolurile necredincioşilor!

În Anglia, documentul cel mai vechi în care e folosită notația arabă este din 1490, dar răspîndirea lui se face și mai tîrziu.

Tot autorul anonim, adică tot practica muncii conduce la numerele pozitive și negative. Negustorii din Florența folosesc, primii, registre cu debit și credit. Regulile de calcul cu aceste numere de asemenea nu sînt „creația" unui matematician, ci se stabilesc treptat de la sine. Dacă, de pildă, din magazia de cereale s-au vîndut 400 de kg, în grabă scriem — 400 cu gîndul: cînd voi face socotelile, am de scăzut 400 kg; dacă s-au mai înmagazinat 300 de kg, scriu în grabă, + 300. Cît grîu a rămas? Cît a fost — 400+300, adică — 100; deci $-400+300=-100$.

Primele lucrări de aritmetică-algebră apar în Asia; de obicei, alături de cunoștințe de geometrie și trigonometrie, și mai ales, de astronomie. *Arya bhata* (sec. V), *Brahmagupta* (sec. VII), în India, dau reguli — în versuri, pentru a fi mai ușor memorizate — privind regula de 3, dobînzi, progresii aritmetice, ecuația de gradul II.

Al Horezmi (din Horezm, astăzi în R.S.S. Uzbekă) scrie în 830 lucrarea *Al-Gebr wel mukabala*, din care algebra își trage nu numai numele, ci și principii de bază asupra ecuațiilor (trecerea unui termen cu semn schimbat în celălalt membru), asupra calculului algebric, ca și metoda de rezolvare a ecuației de gradul II, la care însă se consideră numai rădăcinile pozitive, căci numerele sînt reprezentate prin segmente.

Din numele autorului derivă termenul *algoritm*.

Al Horezmi privește algebra ca o știință *mai generală* decît aritmetica, putînd aborda probleme „de tot felul". Este tocmai axa dezvoltării algebrei elementare.

În perioada 1150—1450 se introduc în Europa operele cunoscute de arabi, pe de o parte cunoștințele de aritmetică și algebră ale popoarelor din India și Asia centrală, pe de altă parte operele Greciei antice traduse de ei. Un „furt de știință" memorabil are loc pe la 1120 cînd un călugăr,

Adelhard de Bath, se deghizează în student mahomedan, urmează cursuri la *Cordoba* (în Spania, pe atunci sub stăpînirea maurilor și unde cultura arabă cunoaște o mare înflorire), reușește să-și procure o copie după Euclid, o alta după Al Horezmi, opere pe care le traduce, la întoarcere, în limba latină — atunci limba cultă a Europei.

Leonard Fibonacci (din Pisa), după ce călătorește în Orient, scrie, la 1202, *Liber abaci* (Cartea calculului), carte care a avut o mare circulație în Europa și a contribuit mult pentru răspîndirea sistemului pozițional de numerație.

În perioada 1450—1600 apar în Europa o serie de lucrări originale, care duc mai departe elaborarea algebrei. Invenția tiparului, la începutul acestei perioade, ca mijloc tehnic și Reforma religioasă, care înseamnă și un mai mare accent pe gîndire, pe eliberarea de sub tirania dogmelor, sînt cauzele principale ale unei noi înfloriri a culturii.

Trăsătura esențială în dezvoltarea algebrei este trecerea treptată, prin intermediul unor numeroase forme de dibuire, de la algebra *retorică*, în care raționamentele se fac în limbajul obișnuit, în cuvinte, la algebra *sincopată*, în care se folosesc prescurtări de cuvinte și de aici la algebra *simbolică*.

Cu toții am simțit, prin proprie experiență, avantajul notațiilor algebrice simbolice, în momentul cînd, ca școlari, am trecut de la aritmetică la algebră. Probleme complicate, cu dificultăți de judecată și de comunicare, cînd folosim cuvinte, capătă dintr-o dată o clarificare deplină cînd le punem în ecuație. Simbolurile algebrice ajută gîndirea să se concentreze pe esențial, o ajută să cuprindă *sintetic* condițiile problemei și să aplice metode *generale*, care nu mai depind de conținutul *concret* al enunțului, ci numai de *relațiile* traduse prin ecuații.

Aceasta este tot o operă predominant colectivă. Algebra sincopată are o mare varietate de forme; fiecare autor folosește prescurtări proprii — de genul acelora pe care le fac elevii cînd scot notițe — care îi sînt de folos nu numai pentru economia de timp ci și pentru concentrarea gîndirii esențială în munca matematică. Cînd voi să-și comunice

rezultatele, ei sînt nevoiți să facă din nou apel la limbajul în cuvinte — încărcat și dificil — tocmai pentru că nu există un „cod" universal acceptat.

Numai cu timpul, strecurînd prescurtări și făcîndu-le din ce în ce mai scurte, uniformizîndu-le treptat prin ajustări reciproce, se ajunge la o algebră simbolică în care relațiile se exprimă exclusiv *cu ajutorul literelor — simbolizînd cantități, și al semnelor de operație.*

Prima algebră simbolică se publică abia în 1591 de către *Viète*. Simbolismul actual este introdus de către Descartes.

Capitolul VI

SPRE O MATEMATICĂ NOUĂ

Noi condiții sociale și psihologice

Sîntem la începutul secolului al XVII-lea. Oamenii nu l-au uitat pe Euclid. Între timp au învățat algebră.

Au învățat și un lucru mult mai prețios: să gîndească din nou. Și să deschidă ochii; nu numai pentru a buchisi, ci pentru a privi, liber și atent, în jur, în sus. În sus: Copernic, Kepler, Galileu.

Lucrarea astronomului polonez *Copernic* (1473—1543), *De revolutionibus orbium coelestum*, înseamnă o cotitură esențială nu numai în astronomie, ci în chiar modul de a privi lumea.

— Ridicați-vă ochii de pe buchii, iată ce se vede prin această lunetă — le strigă Galileu, și mii de oameni îl urmăresc fermecați, în timp ce o mînă de deținători ai puterii, cu o furie oarbă — în adevăr *oarbă* —, încearcă să mai întîrzie un fenomen tot atît de necesar ca sporul treptat de lumină după ivirea zorilor.

Oamenii au învățat să se miște. Caută să înconjoare pămîntul, au descoperit un continent nou. Și, navigînd, își pun probleme: să traseze hărți, să măsoare timpul, să-și determine poziția pe mare prin coordonate.

Ei folosesc artileria în nesfîrșitul șir de războaie care urmează Reformei religioase; din nou, o problemă de mișcare, relația poziție-timp.

Probleme de viață, de tehnică, desigur. Dar care îndrumă și matematica pe un drum nou. Direcția lui? La început mai modestă: *descrierea* mișcării.

Care însă nu e decît un prim capitol într-o problemă mult mai amplă: problema generală a mișcării, inclusiv a cauzelor mișcării, problema și mai generală a legilor naturii, a exploatării energiei fizice. Și care înainte de a fi o problemă de fizică e o problemă gravă, de ordin social. Orînduirea feudală este perimată. Burghezia luptă pentru o orînduire nouă, progresistă. Energia musculară — a animalelor de povară, a sclavilor, a muncitorilor manuali, care a constituit atîtea mii de ani forma principală a forței de muncă — nu mai e suficientă. Ea își va adăuga în secolele următoare energia naturii și se va desemna, mai tîrziu, tendința apoi și posibilitatea ca aceasta să dețină rolul principal, în sarcina omului rămînînd ceea ce îi este specific: forța gîndirii sale, priceperea de a supune și mînui forțele naturii.

Iată, foarte pe scurt, condiții de ordin tehnic și de ordin social care pun cercetării științifice probleme noi.

Nu înțelegem cu aceasta că fiecare matematician în parte este conștient de rolul și de importanța muncii lui pentru dezvoltarea societății. Mobilurile imediate ale cercetării rămîn adesea cele de ordin psihologic. O activitate matematică sistematizată și pe deplin conștientă de rolul ei social va apare abia în timpul nostru. Dar și atunci cînd nu este explicită, există o influență reală a nevoilor societății asupra muncii matematice, în liniile ei mari.

Condiția psihologică principală care rămîne activă în primul plan este cea enunțată la început: curajul de a gîndi personal. E un fel de *renaștere* în matematică, analogă celei din domeniul artei.

Eliberarea de sub tirania unor texte vechi nu înseamnă desconsiderarea și nici măcar ignorarea creațiilor antichității. Înseamnă preluarea lor creatoare, continuarea lor, fie mai departe în aceleași direcții, fie în direcții noi. Vom vedea că cei mai mari creatori ai secolului ce urmează pleacă sau se

8*

inspiră din antici, dar nu rămîn la ei, îi depășesc, adesea în mod esențial.

Reapare, într-o formă nouă, „spiritul" celor trei secole preeuclidiene, adică efervescența creatoare, plăcerea de a gîndi, entuziasmul în fața adevărului sau, mai ales în procesul descoperirii lui, stimulul dat de întrecerile reciproce în această activitate euristică — un fel de nou romantism matematic. În timp ce în literatură, apare un nou clasicism care „imită" pe cel antic, în matematică, noul romantism nu constituie o imitație directă, e numai semnul că omul a revenit la uneltele care îi sînt proprii.

Și fiindcă am alunecat pe panta analogiilor cu literatura, să mai menționăm că romantismului din secolul al XVII-lea îi urmează un curent realist, naturalist, în secolul al XVIII-lea mai apropiat de Arhimede decît de preeuclidieni, caracterizat prin axarea matematicii pe cunoașterea naturii. Un nou „clasicism", în stilul lui Euclid, în care aspectul dominant îl constituie echilibrul și armonia construcției, în t mp ce aspectul uman efervescent este ascuns, va fi opera începutului secolului nostru.

În capitolul de față ne îndreptăm atenția asupra epocii romantice, care pregătește entuziast și cu sentimentul că face artă pură, drumul spre o matematică nouă, deosebit de fertilă.

DESCARTES RENÈ (1596—1650)

Viața

Ceea ce impresionează în viața lui Descartes este, în primul rînd, interferența între două solicitări divergente, una a mediului și a clasei în care s-a născut, cealaltă a vocației sale de gînditor. Deși nu făcea un mare lux în îmbrăcăminte, purta două embleme: sabia la șold — semn distinctiv al faptului că făcea parte din clasa nobililor — și pana la pălărie. Spada sau pana? Ce avea să precumpănească? Știm ce a devenit; istoria privește viața și opera lui

așa cum s-au realizat. Dacă însă am reuși să ne imaginăm pe Descartes la 21 de ani și să povestim despre el cuiva care nu cunoaște urmarea, am putea crea un moment de „suspans", de emoție. Spre ce se îndreaptă viața acestui tînăr plin de posibilități?

În viața multor tineri apar puncte de răscruce, în care ei trebuie *să opteze*. Un tînăr la 20 de ani înseamnă puține evenimente trăite, dar înseamnă o mare diversitate de *posibilități*. Împrejurările vieții exterioare dar, mai ales, ale celei interioare determină o alegere; alegere, uneori, plină de dramatism. Căci avîntul pe calea aleasă poate fi umbrit de regretul de a fi părăsit alte căi posibile: numai întrevăzutn sau abia schițate în punctul de indeciziune al răscrucii. Între absolventul liceului și studentul din anul I, distanța ie timp este de numai cîteva luni, dar cît de mare e deosebirea de structură! Absolventul de liceu înconjoară universitatea, oprindu-se pe rînd, ezitant, la ușa diverselor facultăți, neștiind la care să bată, conștient că acest gest *determină* o anumită viață realizată din mai multe posibile; pe cînd studentul din anul I *a optat*. Problema lui nu mai e de a plănui, ci de a realiza ceea ce a plănuit.

Uneori, opțiunea e ușoară. Alteori, ea seamănă cu o cumpănă a apelor și un fapt mărunt poate da un impuls decisiv într-o direcție sau în cea opusă.

Opera lui Descartes e un tezaur al umanității. Citindu-i viața, resimțim o emoție ciudată la gîndul că „s-ar fi putut ca această operă să nu apară". Și întîrziem cu reflecții. Vor mai fi existat „Descarți" potențiali care nu s-au realizat? Cît va fi pierdut umanitatea pentru că un geniu virtual a fost determinat să mînuiască spada, aruncînd condeiul? Ce am putea face pentru a pune în valoare energiile potențiale ale tuturor oamenilor? De ce rezolvăm probleme de maxim numai cînd e vorba de a exploata bogății materiale și nu și atunci cînd e vorba de valorificarea energiilor umane?



Fiu al consilierului parlamentului din Bretania, Descartes intră ca elev intern la vîrsta de 8 ani în colegiul La Flèche.

O curiozitate: i se permite să nu se scoale la oră fixă, să rămînă în pat pînă mai tîrziu. Aşa cum îi povesteşte lui Pascal, şi ca om matur lui Descartes îi plăcea să rămînă dimineaţa în pat, meditînd; el afirmă că, pentru el, e cea mai bună „metodă" de a rezolva probleme matematice. Faptul e mărunt dar pare a avea oarecare semnificaţie pentru opera sa. Dacă Descartes ar fi fost supus unui regim riguros şi obligat să intre în bibliotecă sau la ore de curs, ar fi fost poate împins prin aceasta spre o carieră de erudit. Un aspect esenţial al operei sale — după cum vom aminti mai jos — este tocmai bizuirea pe *gîndirea proprie*...

În 1612, Descartes merge la Paris ducînd un timp o viaţă de „om de lume", dar anii 1615 şi 1616 îi consacră studiilor de matematică, încurajat la aceasta de prietenia cu un alt pasionat al acestui domeniu Mersenne — prietenie care va influenţa şi mai tîrziu, în mod pozitiv, cariera sa ştiinţifică.

Dar, în 1617, împins cum spuneam mai sus, de prejudecăţi ale clasei sale, se înrolează ca ofiţer în armata prinţului Mauriciu de Nassau. Va deveni el un ofiţer oarecare, vor fi făcute să tacă înclinările lui spre meditaţie filozofică, spre probleme matematice?

Nu, pentru că sînt prea puternice. Nu, şi din alt motiv, mai general. Deasupra mentalităţii de clasă există o „atmosferă a timpului", favorabilă cercetării şi gîndirii libere, negurile şi opresiunile Evului mediu au început să se risipească. Însă, alături de motivări de fond, nu se poate să nu luăm în consideraţie şi factorul *întîmplare*, care chiar dacă nu determină sensul, influenţează — în bine sau în rău — ritmul.

Ofiţerul Descartes e în Breda (oraş în Ţările de Jos) şi într-un moment de relaxare a ocupaţiilor militare, se plimbă, aruncînd în jur priviri cînd indiferente cînd cu o sclipire de curiozitate, ca un om într-un oraş nou. Dar, la un moment dat, se opreşte în loc, atenţia lui, pînă aici dispersată în vag, se concentrează. E în dreptul unui afiş; îşi dă seama că e ceva interesant şi îl stînjeneşte grozav faptul că nu cunoaşte limba. Se adresează primului trecător care se află în preajma lui. Intîmplarea face că acesta este directorul

unui colegiu, el însuși iubitor de matematică și care se arată foarte amabil cînd recunoaște în interlocutorul său un cunoscător în materie. Afișul conține o problemă de geometrie publicată ca o provocare adresată tuturor. Obiceiul de a se face astfel de provocări de tip sportiv nu ține de întîmplare, ține de ceea ce am numit mai sus atmosfera timpului care favorizează mai mult duelurile între abilitățile minții decît pe acelea cu floreta.

Nu ține de întîmplare nici faptul că, în aceeași zi, Descartes reușește să rezolve problema. Iar acest succes îi retrezește gustul pentru ocupațiile gîndirii, îl face să reflecteze cu melancolie la timpul irosit cu milităria. Fără întîmplarea adusă de o plimbare fără scop, aptitudinile lui de gînditor, desigur, fără să dispară, ar mai fi rămas poate multă vreme adormite, în stare latentă. Și așa îi este greu — datorită acum atmosferei clasei sale — să spună dintr-odată: demisionez din armată, am gust de probleme. Cele două solicitări divergente continuă... Va colinda Europa ca ofițer, ajungînd pînă în Bavaria; începuse războiul despre care nu se știa atunci că se va numi cîndva „Războiul de 30 de ani." Dar, între două marșuri, în clipe de răgaz sau în scurte perioade de acalmie, în timp ce camarazii săi joacă în zaruri sau își povestesc „vitejii" — pe cîmpul de luptă sau în cuceriri amoroase — povești în care canavaua e a unor întîmplări reale dar broderia e a unei imaginații febrile — Descartes e împins, poate fără să o vrea în mod explicit, spre punerea în lucru a forțelor care îl caracterizează: reflecția, gîndirea rațională. Spunem „fără să vrea", căci, după propria-i mărturisire, ideile mari ale filozofiei și creației sale matematice îi apar într-un „vis" în noaptea de 10 noiembrie 1619, pe cînd se afla într-o tabără pe Dunăre. Nimic mai independent de voință decît conținutul visurilor noastre; unele visuri, construcții fantasmagorice cărora nu le găsim o explicație; altele, tot construcții ale fanteziei dar atît de transfigurate încît cu greu, prin cercetări psihice speciale, se pot explica, se poate găsi rădăcina lor reală în preocupări sau înclinații care, deși vii, sînt înăbușite în noi și își caută o „ieșire", o manifestare; în fine, există visuri care nu fac decît să con-

tinue preocupări mai mult sau mai puțin explicite din timpul zilei. Visul lui Descartes este desigur în această ultimă categorie. Și alți creatori — am amintit în alt loc pe Poincaré — au vorbit despre travaliul gîndirii în timpul somnului sau în timp ce se avea impresia că nu se mai „lucrează" la problema respectivă. Problema psihologică rămîne deschisă: de ce în vis și nu la masa de lucru? Se pare că forțele de creație se manifestă liber și în plinătate, cînd contactul cu problema e pur, cînd orice preocupări de altă natură și chiar ambiția de a rezolva problema, oarecum exterioară problemei în sine, au tăcut, cînd nu a mai rămas în prezență decît omul și problema sa, pasiunea cercetării în sine...

În fine, în 1621, Descartes se retrage din armată și își consacră timpul experiențelor de optică, meditațiilor, călătoriilor. În 1628, stimulat și de sfaturile unui prieten mai în vîrstă care, impresionat de calitățile gîndirii sale, îi pune în evidență *datoria* de a le valorifica, Descartes se stabilește în Olanda — unde va rămîne 20 de ani — pentru a se sustrage solicitărilor mărunte ale mediului său de la Paris.

În acești ani își publică opera a cărei valoare este recunoscută de îndată — regele Franței îi acordă o pensie în onoarea descoperirilor sale. Din prudență cartea *Le Monde* pe care o scrisese pînă în 1633, nu o publică ca să nu intre în conflict cu vederile bisericii.

Dar în sîmburele succesului se află, neștiut, și germenele nefericirii. Regina Cristina a Suediei își făcea un punct de onoare din a avea la curtea ei savanți și filozofi vestiți ai vremii. În 1649, Descartes — devenit celebru — este invitat în Suedia și, din nefericire pentru el și pentru cultura umanității, acceptă. Reflectă această ambiție de regină o apreciere reală a științei, a culturii sau este numai un capriciu, dorința de a-și decora curtea cu nume celebre?

Psihologia acestei regine care are o fire capricioasă, înclinată spre aventuri, fără să afle în jur și nicăieri opreliști și condiții care să o facă mai „cuminte" este o problemă deschisă pentru istorici. Dar deasupra unor caractere individuale, trebuie să distingem mai puternică, mentalitatea

vremii. Indiferent de faptul dacă savanţii sînt priviţi ca valori în sine sau mai mult ca decor, ei sînt situaţi într-un plan anex, subaltern şi obligaţi să se supună tuturor canoanelor protocolului. Pentru că reginei îi place să facă zilnic la ora 5 dimineaţa o partidă de călărie, curtea întreagă e obligată să o urmeze. Onoarea de a fi în preajma ei e un determinant mai puternic decît dulceaţa somnului de dimineaţă. Dacă ne amintim plăcerea lui Descartes de a medita dimineaţa în pat — pe care o avea încă din copilărie — ne imaginăm ce efort şi ce constrîngere reprezintă acest protocol pentru el. Frigul dimineţii — acela din Suedia ! — împreună cu faptul că îl întîmpină din constrîngere, fără ceea ce am numi azi plăcerea sportivităţii, îl fac să contracteze o pneumonie. La 11 februarie 1650 se stinge, înainte de a fi împlinit 54 de ani, acest strălucit reprezentant al geniului uman, care avea să marcheze o cotitură atît de importantă în cultură.

După perioada de cumpănă din tinereţe, în care ocupaţii şi mentalităţi din afara culturii caută să-l smulgă ei, fără să reuşească, iată-le învingîndu-l în plină maturitate, cînd umanitatea ar mai fi putut primi atîtea valori din experienţa lui de gîndire şi de viaţă.

Opera filozofică

Opera principală a lui Descartes apărută în anul 1637 este *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Expunere despre metoda de a-ţi călăuzi bine raţiunea şi a căuta adevărul în ştiinţe). Ea are trei anexe: *La Dioptrique*, *Les Méteores*, *La Géometrie*. Ultima anexă, Geometria, conţine ideea de bază a geometriei analitice, idee de o importanţă excepţională, dacă ne gîndim că ea a condus la un vast teren extrem de fertil şi de mare utilitate, practică şi teoretică, a cercetării matematice. O operă atît de mare prezentată ca o simplă

anexă la un eseu filozofic? Oare Descartes nu-şi dă seama de marile ei implicaţii în viitor?

Aici se reflectă faptul că Descartes nu este un matematician pur, ci un filozof-matematician. Se poate face matematică din plăcere, dintr-un fel de instinct uman am putea zice, fără ca cel care o face să-şi pună problema de a analiza şi interpreta esenţa activităţii sale — tot astfel cum cineva cîntă cu plăcere, fără să facă teoria armoniei. Descartes, aşa cum arată titlul lucrării sale, are atenţia şi interesul concentrate asupra unei probleme umane de mare anvergură: metoda de a căuta adevărul. El visează sau ţinteşte, probabil, la o metodă pe cît de eficace şi sigură, tot pe atît de *generală*. Are impresia că a găsit-o. Atunci, e natural să caute un exemplu concret şi elocvent, de *aplicare* a metodei. Într-o astfel de optică, anexa intitulată Geometria ne apare ca o ilustrare într-un caz particular a eficacităţii unei metode cu o sferă de aplicaţie mult mai largă, pe care autorul ei o consideră chiar universală. Cînd, după o teorie generală, ni se dă un exemplu, două ori trei, subînţelegem că seria exemplelor ar putea continua şi ne oprim la cîteva numai pentru economia expunerii.

Se pare că Descartes a realizat mai puţin şi, în altă privinţă, mai mult decît intenţionase. Mai puţin, în partea generală, pentru că nu este compatibilă cu natura umană ideea de a poseda o cheie universală şi sigură, care să deschidă automat toate tainele. Sfera cunoştinţelor noastre, eficacitatea metodelor noastre creşte continuu şi — aşa cum arată cuceririle moderne — din ce în ce mai repede, cu o acceleraţie de tip exponenţial; dar în aceeaşi proporţie şi în acelaşi ritm creşte şi contactul cu necunoscutul, o vastă problematică nouă. Şi aceasta nu se rezolvă de la sine, printr-o metodă prestabilită, ci necesită — alături de simpla aplicare a cuceririlor vechi — descoperirea de noi metode, o operă de creaţie cu atmosfera specifică de problematic şi nesigur, dar tocmai prin aceasta cu o mare putere de atracţie, cu un patetism care îi dă un farmec propriu — ceea ce face că progresul e mai lent decît în optica unui partizan al meto-

dei universale, dar mai sigur decît în optica acelui care ar privi nesiguranța unei cercetări izolată în timp și în spațiu.

În exemplul pe care îl dă, Descartes realizează mai mult decît intenționase: nu un simplu exemplu, nu un exemplu oarecare de aplicare a metodei sale filozofice, ci o nouă metodă înăuntrul matematicii, care însă avea să-i aducă și un *conținut* nou, un conținut care — se va constata cu o uimire plină de bucurie — avea să lege mult mai strîns matematica de cercetarea legilor naturii. De altfel, mai întotdeauna, valoarea unei idei matematice noi *se simte*, fără să se poată imagina traiectoria implicațiilor viitoare, fără să se poată spune explicit, cu anticipație, în ce constă această valoare.

Mai puțin decît intenționase... Această exprimare să nu lase impresia că ceea ce a realizat în filozofie e de mică însemnătate. Expresia decurge din faptul că ceea ce intenționase era un lucru extrem de înalt, prea mare pentru condiția umană. Mai puțin decît o metodă absolută, dar totodată foarte mult în raport cu metodele, cu concepțiile sau mentalitățile anterioare.

Avem atenția îndreptată spre gîndirea matematică. Ea nu poate fi înțeleasă însă, în sine, ruptă de ansamblul culturii și al vieții oamenilor. Cu atît mai mult în contextul de față, cu atît mai mult cînd este vorba de acest moment crucial, momentul Descartes. Înainte de a vorbi deci despre geometria carteziană, ne vom opri, fie și numai pentru a atinge punctele esențiale, asupra filozofiei, metodei carteziene.



Discursul asupra metodei e o operă mare expusă într-un număr surprinzător de mic de pagini. În plus, mai ales în comparație cu multe alte opere filozofice, foarte accesibilă oricui, inclusiv cititorului care nu are o „cultură" filozofică specială, foarte simplă. Simplă și totuși mare? Există și mentalitatea conform căreia valoarea unei opere este proporțională cu dificultățile de acces la ea — mentalitate întărită de tam-tamul „modern" care se face în jurul operelor

„ermetice" din diverse domenii. Mentalitate falsă. Nu totdeauna valoarea este egală cu costul. Hipnotizaţi de lucrurile care costă mult, uităm să le savurăm pe cele gratuite, la îndemîna fiecăruia. Evident că, în multe cazuri, o problemă importantă este şi grea. Dar unii autori exploatează acest lucru, prefăcîndu-se a considera propoziţia ca valabilă în *toate* cazurile şi, mai ales, considerînd reciproca de la sine valabilă; dacă o problemă este sau *pare* grea, înseamnă că e importantă. De aceea, ei prezintă într-o formă ermetică, greu accesibilă, lucruri care, din cauza acestei prezentări îşi cîştigă faima de importante, iar în realitate nu sînt. Dar ca să ne dăm seama că nu sînt importante ar trebui un efort de analiză şi de descifrare, care în general nu e dus pînă la capăt. De aici confuzia între ceea ce este valoros şi ceea ce este greu accesibil şi exploatarea ei de către autori care urmăresc mai mult un succes aparent, personal, decît căutarea sau punerea în circulaţie a adevărului sau a altor valori umane. Acest fals ermetism triumfă nu numai într-o anumită literatură sau artă sau „filozofie", ci, uneori, şi în matematică.

Opera lui Descartes este, cum spuneam, simplă, accesibilă. Cu o valoare încă actuală, cu o valoare istorică, în contextul mentalităţii în care a fost scrisă, imensă. E păcat că unii tineri, înşelaţi de falsul ermetism de care vorbeam, înfruntă cu un curaj demn de admirat dar adesea inutil, opere „grele", înainte de a o fi savurat şi simţit pe aceasta.

Discursul asupra metodei nu începe ca o operă modernă cu laborioase referinţe bibliografice sau cu enunţarea unor principii înalte şi misterioase. Autorul mărturiseşte direct cum a gîndit, ce probleme l-au frămîntat, cum a ajuns la soluţiile pe care ni le propune. Iar această sinceritate şi simplitate emoţionează; opera are aerul unei confesiuni, aproape al unei autobiografii în care expunerea unor evenimente materiale, trăite, se împleteşte cu aceea a evenimentelor interioare, a reflecţiei, a cugetării în mers.

La terminarea studiilor — reamintim că şi le-a făcut într-un colegiu dintre cele mai renumite atunci în Europa şi

a fost un elev strălucit, deși sarcinile directe de elev interferau cu pasiunea sa pentru meditație — el aruncă o privire retrospectivă și face o analiză critică asupra celor ce învățase, asupra felului cum învățase.

Deși recunoaște unele aspecte pozitive în ceea ce învățase pînă atunci, în esență, el își dă seama că tot ce primise ca adevărat este șubred și îndoielnic.

Și atunci ia hotărîrea cea mare.

Să caute adevărul nu în cărți, ci în propriile lui reflecții și în cartea cea mare a lumii.

Aici este punctul central al revoluției în cultură, pe care o săvîrșește. Nu prin texte, ci văzînd, experimentînd și gîndind, se află adevărul.

Nu ne mai putem da seama de importanța cotiturii, pentru că noi nu am simțit stilul culturii scolastice, am trăit direct numai cultura modernă. Dar să ne amintim lupta eroică a lui Galileu cu hipnotizații și sclavii textelor biblice și aristotelice.

E în adevăr, aici, o cotitură esențială.

„Am fost hrănit cu texte încă din copilărie și, pentru că mi se spunea insistent că cu ajutorul lor se putea cîștiga o cunoaștere clară și sigură a tot ce este util vieții, aveam o mare dorință să le învăț. Dar îndată ce terminai ciclul complet de studii la capătul căruia ești primit de obicei în tagma docților, mi-am schimbat complet părerea. Căci m-am găsit încurcat cu atîtea îndoieli și erori, încît îmi părea că nu trăsesem alt folos, încercînd să mă instruiesc, decît pe acela că descoperisem din ce în ce mai mult ignoranța mea."

Apoi trece în revistă diversele discipline învățate: limbile, istoria, poezia, matematica, teologia, filozofia.

„Nu voi spune nimic despre filozofie: cel mult că, văzînd că ea a fost cultivată de cele mai excelente spirite care au trăit în lungul secolelor și că totuși nu se găsește în ea nici un lucru care să nu se mai discute și care deci să nu fie îndoielnic, nu aveam de loc prezumția de a spera să descopăr eu mai bine decît alții și că, luînd aminte cît de multe păreri

pot fi într-o aceeași chestiune, susținute de oamenii cei mai învățați, fără să poată fi mai mult de una adevărată, consideram ca și fals tot ceea ce nu era decît probabil."

....

„Iată pentru ce, îndată ce vîrsta îmi permise să nu mai fiu supus profesorilor mei, am părăsit complet studiul textelor. Și, hotărîndu-mă să nu mai caut altă știință decît pe aceea care s-ar putea găsi în mine însumi sau în marea carte a lumii, folosii restul tinereții mele ca să călătoresc, să văd evenimente și armate, să mă întîlnesc cu oameni cu diverse feluri de a fi și în diverse condiții, să culeg diferite experiențe, să mă verific pe mine însumi în împrejurările în care soarta mă plasa și totdeauna să fac astfel de reflecții asupra lucrurilor care mi se prezintă, încît să pot trage un folos. Căci mi se părea că voi putea găsi mai mult adevăr în raționamentele pe care fiecare le face în legătură cu treburile care îl interesează și pentru care faptele îl pedepsesc curînd dacă a judecat prost, decît în acelea pe care le face un cărturar în cabinetul său, în legătură cu speculații care nu au nici un efect..."

Aceasta este hotărîrea. Cum trebuie realizată? Dar, mai întîi, poate fi ea realizată?

„Judecata este lucrul din lume cel mai bine împărțit: căci fiecare gîndește că are atît de multă, încît chiar acei care sînt greu de mulțumit în privința altor lucruri n-au de loc obiceiul să dorească a avea mai multă (judecată) decît o au. Drept care nu este de crezut că cu toții se înșeală; ci, mai curînd, aceasta arată că forța de a judeca bine și de a distinge adevărul de fals, ceea ce înseamnă propriu vorbind bun simț sau rațiune, este în mod natural egală la toți oamenii; așa încît diversitatea părerilor noastre nu vine de acolo că unii ar fi mai înțelepți decît alții, ci numai din aceea că direcționăm gîndirea noastră pe căi diferite și nu luăm în considerare aceleași lucruri. Căci *nu e destul să ai judecată sănătoasă, principalul este să o aplici cum trebuie*". (sublinierea noastră)

Vom cita acum pasajul care conține, în esență, metoda.

....În locul acestui mare număr de precepte din care e compusă logica, am crezut că îmi vor fi destule următoarele patru, numai să iau decizia fermă și constantă de a nu uita nici măcar o singură dată să le respect.

Primul era să nu primesc niciodată nici un lucru ca adevărat, decît dacă îl recunosc în mod evident ca atare; adică să evit cu grijă graba și părerea nefundată și să nu cuprind nimic mai mult în judecățile mele decît ceea ce s-ar prezenta atît de clar și atît de direct gîndirii mele, încît să nu am niciodată prilejul de a le pune în dubiu.

Al doilea, să împart fiecare din dificultățile pe care le am de examinat în atîtea părți în cîte se va putea și cîte ar fi potrivit pentru a le rezolva mai bine.

Al treilea, să conduc în ordine judecățile mele, începînd cu lucrurile cele mai simple și cele mai ușor de cunoscut, pentru a mă ridica puțin cîte puțin, ca pe niște trepte, pînă la cunoașterea celor mai compuse, și presupunînd chiar o ordine între acelea care nu se succed în mod natural unele după altele.

Și ultimul, să fac peste tot enumerări atît de complete și revederi atît de generale, încît să fiu sigur că nu am omis nimic."

Recunoaștem aici principii pe care le aplicăm curent în munca noastră, chiar fără să mai știm de unde le-am învățat.

Să nu admiți decît ceea ce ai demonstrat (și ai înțeles clar); să împarți o problemă grea în mai multe probleme simple (de ex. în metoda intersecției locurilor geometrice sau în rezolvarea prin etape a problemelor de aritmetică); să începi cu rezolvarea problemelor simple și să faci din aceasta un mijloc pentru a ataca probleme mai complexe (de ex. să rezolvi întîi ecuația de gr. 2 fără termen în x și pe urmă pe cea completă, reducînd-o la primul caz; să înveți să construiești triunghiurile în cazurile clasice și pe urmă în cazuri speciale etc.); să faci recapitulări și sinteze, pentru a asigura fixarea noțiunilor și vederea de ansamblu.

Sînt aici principii generale, lucruri care ne sînt familiare prin practică și care capătă un gir nou prin prestigiul lui Descartes.

Totuşi, pentru a reveni la ideea centrală a acestei expuneri, *nu din cauza* prestigiului lui Descartes trebuie să aplicăm aceste principii, ci numai pentru că sîntem convinşi de justeţea lor. Numele Descartes poate fi un îndemn puternic să reflectăm cu seriozitate asupra lor, dar atît. Prin esenţa lui, Descartes nu poate fi o dogmă.

Descartes nu poate fi adoptat şi copiat literă cu literă; ar fi o gravă inconsecvenţă, pentru că Descartes ne sugerează să reflectăm cu atenţie tocmai asupra valorii gîndirii şi efortului personal în opoziţie cu tendinţa de copiere.

Descartes însuşi nu-ţi impune metoda lui; ţi-o oferă spre reflecţie, eşti liber s-o primeşti ori ba.

„Astfel, intenţia mea nu este să predau aici o metodă pe care fiecare trebuie să o urmeze pentru a-şi conduce bine raţiunea, ci numai de a prezenta în ce fel am încercat să o conduc pe a mea. Cei care se amestecă să dea precepte trebuie că se apreciază ca mai abili decît acei cărora le dau (aceste precepte); şi dacă ei greşesc un cît de mic lucru, sînt de condamnat. Dar neprezentînd această scriere decît ca o istorioară sau, dacă preferaţi, ca o poveste, în care, printre exemple care se pot imita, se vor găsi poate multe altele pentru care să ai motive a nu le urma, sper că ea va fi de folos unora, fără a fi vătămătoare nimănui şi că cu toţii vor fi mulţumiţi de sinceritatea mea."

Să prevenim o eventuală neînţelegere, care ar putea izvorî din faptul că am ales să cităm acele pasaje din care reiese valoarea gîndirii personale şi a experienţei directe.

Nu înseamnă că textele scrise trebuie ignorate. Dimpotrivă. Cu condiţia de a reflecta asupra lor, de a trece afirmaţiile lor prin prisma unei activităţi proprii de convingere, ele sînt nu numai utile, ci indispensabile pentru munca noastră, pentru dezvoltarea capacităţii noastre.

„...cititul tuturor cărţilor bune este ca o convorbire cu cei mai distinşi oameni ai secolelor trecute, care sînt autorii lor, şi chiar o convorbire chibzuită în care ei nu ne dezvăluie decît cele mai bune din reflecţiile lor..."

Nu trebuie să vedem în Descartes un om care se izolează de colaborarea cu ceilalţi oameni.

În primul rînd el se adresează unui public mai larg decît cititorii obişnuiţi în acea vreme.

„Iar dacă scriu în franceză, care este limba ţării mele, şi nu în latină[1], care este aceea a profesorilor mei, e din cauză că am speranţa că acei care nu se servesc decît de raţiunea lor naturală curată vor judeca mai bine părerile mele decît acei care nu cred decît în cărţile vechi."

În partea a VI-a, în care Descartes vorbeşte în special despre metoda şi folosul ştiinţelor fizice şi medicale, el atinge şi problema conlucrării nu numai între indivizi, ci şi între generaţii.

„Or, avînd ca scop să folosesc întreaga mea viaţă pentru cercetarea unei ştiinţe atît de necesare şi deoarece am găsit un drum pe care urmîndu-l mi se pare că trebuie negreşit să o descoperi (această ştiinţă) — afară doar dacă ai fi împiedicat sau prin scurtimea vieţii, sau prin lipsă de experienţe; m-am gîndit că nu ar fi remediu mai bun împotriva acestor două piedici decît să comunic în mod exact publicului tot puţinul pe care l-am găsit şi să invit pe oamenii cu spirit sănătos să încerce a merge mai departe, contribuind, fiecare după înclinările şi puterea sa, la experienţele ce vor trebui făcute; iar ei să facă cunoscute de asemenea publicului toate lucrurile pe care le vor afla, pentru ca cei ce vin mai pe urmă să înceapă de acolo de unde predecesorii au ajuns şi astfel, reunind vieţile şi munca mai multora, să ajungem cu toţii împreună cu mult mai departe decît fiecare în parte ar putea-o face."

„Reunind vieţile şi munca mai multora..." Parcă Descartes ar fi prescris în aceste cuvinte spiritul muncii ştiinţifice de astăzi. Astăzi, nu s-ar mai găsi un om de ştiinţă care să lase la o parte tot ce este scris în cărţi şi s-o ia de la început, prin propriile lui reflecţii. Astăzi, cei ce vin mai pe urmă

---

[1] În secolul al XVII-lea, operele de ştiinţă se redactau în limba latină, putînd trece astfel orice fel de graniţe, căci toţi oamenii culţi ştiau latineşte.

încep de acolo de unde „predecesorii lor au ajuns" — chiar dacă uneori sînt nevoiți să facă unele rectificări sau precizări sau chiar întoarceri asupra drumurilor predecesorilor. Și astăzi munca științifică este și tinde din ce în ce mai mult să fie colectivă. Problemele deschise sînt atît de vaste, iar numărul cercetătorilor antrenați în studierea lor atît de mare, comunicările între savanți atît de active și de sistematice, încît știința nu mai crește prin salturi, ci printr-o traiectorie continuă, adausurile vin de la o zi la alta, unul dintr-un continent, următorul din alt continent, adesea ori aceeași noutate apărînd concomitent în mai multe puncte ale globului.

Această imensă muncă de colaborare are și un înțeles mai adînc pe care poate că Descartes nu-l întrevăzuse. Descartes intenționase — așa cum am mai amintit — să găsească o metodă de a cerceta adevărul *generală, sigură, sistematică*. Oricît de prețioase ar fi indicațiile pe care el ni le dă, acestea nu au o valoare absolută. Există poate cazuri cînd sistematizarea ajută munca de cercetare, dar există și cazuri foarte semnificative cînd ea împiedică, provocînd o atitudine psihică nepotrivită, procesul de creație. Creația presupune sesizarea unei *idei noi*, neașteptate iar *un sistem* în cercetare pare a împinge spiritul spre folosirea unor căi știute, încercate. Creația presupune și o anumită inspirație, un factor aleatoriu, nesigur, problematic.

O astfel de nesiguranță legată organic de natura gîndirii umane nu poate fi micșorată prin încorsetarea într-un sistem dat de gîndire, într-o metodică prestabilită a gîndirii. Munca sistematică este potrivită pentru *aplicarea* unor adevăruri cunoscute, nu și pentru *descoperirea* unor adevăruri noi. Creatorul fructifică o singură experiență: aceea de a nu se bizui numai pe experiență. Sentimentul că există metode și idei noi, ascunse, pînda lor activă, este starea de spirit proprie creatorului. Atuuri care sporesc șansele de succes, fără a-l asigura complet. Creația rămîne, pe plan individual, problematică. O sporire însemnată a acestor șanse care tind, crescînd, spre siguranță se obține trecînd din planul indi-

vidual în cel colectiv. Ceea ce nu descoperă un om izolat, are mai multe şanse să apară cînd asupra problemei gîndesc mai mulți oameni, diferiţi. Acesta este sensul major al îndemnului spre colaborare pe care Descartes l-a înscris în opera sa.

Fizician și metafizician

În *Optică*, Descartes stabileşte, prin *experiență*, legea refracției (de altfel, enunțată înainte de Snellius).

El încearcă însă o teorie fizică a universului (în *Le Monde*, pe care nu o publică, și în *Principia Philosophiae*, 1644), în care baza experimentală este prea restrînsă, și, în schimb, se acordă un loc prea mare, încrederii în „rațiunea pură" — trăsătură care îl înrudește aici cu teoreticienii antici ai fizicii. Sistemul său se bazează pe ipoteza că universul ar fi supus unei mulțimi de mișcări turbionare (în vîrtej) și caută să explice pe această bază sistemul planetar. Pozitivă este numai intenția, ideea în sine de a explica fenomenele prin legi ale mișcării; explicația în sine este falsă. Explicația justă o va da Newton. Iar teoria lui Descartes va fi supusă unui rechizitor aspru din partea lui Mac Laurin, adept al lui Newton.

Geometria carteziană și esența frumuseții

Frumusețea unei teorii sau probleme matematice constă în stabilirea de legături între domenii care păreau disjuncte, deci de legături *neaşteptate*, care provoacă o surpriză şi o emoţie caracteristică.

Se spune că într-o astfel de apropiere constă și una din caracteristicele frumosului în literatură. Să ne amintim de pildă poezia „La steaua":

La steaua care-a răsărit
E-o cale atît de lungă
Că mii de ani i-au trebuit
Luminii să ne-ajungă

Poate de mult s-a stins
În depărtări albastre
Lumina ei abia acum
Luci vederii noastre

În aceste două strofe ni se vorbește de un fenomen astronomic. Ce va urma? Urmărește poetul să transcrie în limbaj poetic o lecție de astronomie? În fața curiozității noastre, apare strofa următoare:

Tot astfel cînd al nostru dor
Pieri în noapte adîncă
Lumina stinsului amor
Ne urmărește încă.

Oricît de frumos ar fi, prin muzica sa, fiecare vers, frumusețea esențială a poeziei constă în această apropiere între două fenomene care păreau atît de depărtate unul de altul: un fenomen astronomic, un fenomen psihic.

Luați însă orice metaforă literară: veți găsi în ea o comparație condensată, o apropiere între lucruri care păreau disparate și tocmai prin emoția caracteristică acestei apropieri, limbajul comun, șters, uzat prin întrebuințare zilnică face loc limbajului literar, proaspăt, elocvent, evocator.

Frumusețea operei matematice a lui Descartes constă în stabilirea unei legături adînci între algebră — știința calculelor cu numere — și geometrie — știința figurilor geometrice.

Legături între calcul și figuri au existat și mai înainte — în special în capitolul Relații metrice; teorema lui Pitagora, ca să luăm exemplul cel mai simplu, stabilește o legătură între un aspect geometric — faptul că un triunghi are un unghi drept — și o relație algebrică, $a^2 = b^2 + c^2$, între lungimile laturilor lui (relație care *caracterizează* triunghiurile dreptunghice).

Descartes stabilește o legătură *generală*, arătînd că *orice* problemă de geometrie poate fi rezolvată prin calcul algebric. Orice problemă? Chiar și una în care nu apare de loc noțiunea de *mărime*, cum ar fi stabilirea concurenței unor drepte — de pildă a înălțimilor unui triunghi oarecare?

Da, orice problemă. Cum e posibil acest lucru? Să ni se permită să dăm pentru cititorii care nu au ajuns încă la studiul geometriei analitice unele explicații generale.

Fiind date două axe Ox și Oy ortogonale (fig. 20), oricărui punct M din planul lor îi corespunde o pereche de două numere, coordonatele punctului (așa cum se vede pe figură) și invers la o pereche de două numere corespunde un punct

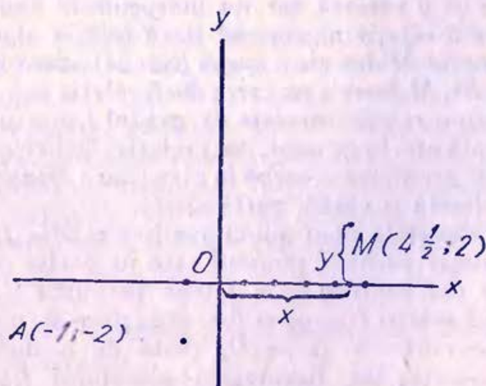


Fig. 20

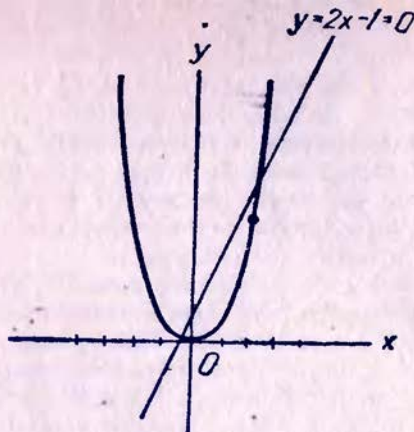


Fig. 21

bine determinat în plan. Dacă cele două coordonate x şi y ale punctului M variază, fiecare putînd lua orice valoare reală, punctele M corespunzătoare vor acoperi tot planul, pe cînd dacă x şi y sînt date, punctul M are o poziţie fixă. Dar dacă x şi y variază dar nu independent unul de altul, ci legaţi de o relaţie algebrică? Dacă relaţia algebrică este $y = x^2$, punctul M descrie o curbă (fig. 21); dacă relaţia este $x^2 + y^2 = R^2$, M descrie un cerc; dacă relaţia este $y - 2x - - 1 = 0$, sau o relaţie oarecare de gradul I în x şi y, M descrie o dreaptă etc. În general, unei relaţii algebrice $f(x, y)=0$, îi corespunde geometric o curbă în plan (sau o dreaptă, dreapta fiind considerată o curbă particulară).

Dacă coordonatele unui punct verifică relaţia $f(x, y) = 0$ (numită ecuaţia curbei), punctul este pe curba corespunzătoare C; în caz contrar nu e situat pe curba C. Dacă ele verifică *două* relaţii $f(x, y) = 0$ şi $g(x, y) = 0$, punctul este situat şi pe curba C şi pe C_1 (dată de a doua relaţie), deci la intersecţia lor. Rezolvarea *sistemului* $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ ne conduce la aflarea punctelor de intersecţie a celor două curbe. Pentru ca 3 drepte, date prin ecuaţiile

lor (de gradul I) să fie concurente (există un punct situat pe fiecare) trebuie să existe o soluție (x, y) care să verifice toate cele 3 ecuații — și algebra ne dă posibilitatea să spunem dacă un sistem de 3 ecuații cu 2 necunoscute este sau nu compatibil.

Reciproc, proprietatea geometrică prin care definim o anumită curbă, condițiile prin care fixăm poziția unei drepte în plan, ne conduc la stabilirea ecuațiilor respective.

Punct ⟶ pereche de numere;
Curbă ⟶ relație algebrică între x și y;
Dreaptă ⟶ relație între x și y de gradul I;
Concurență ⟶ sistem compatibil;
etc.

Iată corespondențele care fac posibilă tratarea unei probleme de geometrie prin algebră.

Exemplu

Fiind dat un punct fix F (numit focar) și o dreaptă fixă d (numită directoare), locul geometric al punctelor la egală distanță de ele este o curbă numită parabolă.

Să se studieze, analitic, proprietăți ale parabolei.

Va trebui să găsim *ecuația* parabolei. În primul rînd să luăm două axe de coordonate Ox, Oy. Dacă le luăm în poziție oarecare, calculele vor fi mai complicate; pentru a avea calcule mai simple, le luăm ca în figura 22. Notăm $O_1F = p$ (dat), deci $OF = \frac{p}{2}$.

Distanța MF o calculăm prin teorema lui Pitagora. Avem, cu ajutorul figurii:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

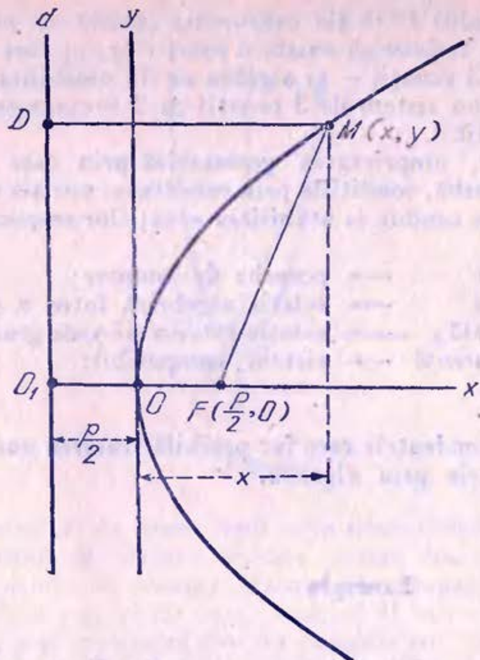


Fig. 22

Distanța de la M la dreapta d are o expresie simplă tocmai pentru că am luat $Oy // d$. Citim pe figură:

$$MD = x + \frac{p}{2}$$

Deci punctul M este pe parabolă dacă:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Ridicînd la patrat și reducînd:

$$y^2 = 2\,px$$

Aceasta este ecuația parabolei (cînd distanța de la focar la directoare este p și axele au fost alese ca în figură).

Să considerăm două puncte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ situate pe parabolă — deci știm că $y_1^2 = 2\,px_1$; $y_2^2 = 2\,px_2$ — și să căutăm coeficientul unghiular al coardei care le unește; numim astfel numărul $m = \operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul făcut de coardă cu axa Ox.

Din triunghiul dreptunghic format pe figura 23 avem:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(formulă care rămîne valabilă și în cazul cînd M_1 ar fi sub axa Ox, deci cu y_1 negativ și în orice alt caz, după cum ne putem convinge).

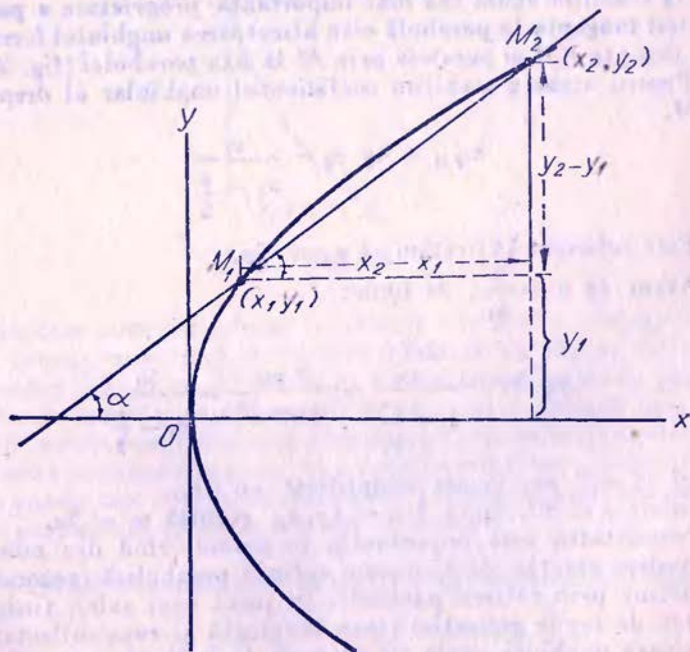


Fig. 23

Dar, din relațiile $y_1^2 = 2\ px_1$; $y_2^2 = 2\ px_2$ rezultă:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2\ p(x_2 - x_1),\ \text{deci:}$$

$$m = \frac{y_2^2 - y_1^2}{(x_2 - x_1)\ (y_2 + y_1)} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

Să facem acum ca punctul M_2 să se apropie de M_1 pînă se confundă cu el; dreapta M_1M_2 devine atunci tangenta în M_1 la parabolă.

Deci coeficientul unghiular al tangentei în $M_1(x_1,\ y_1)$ la parabolă este:

$$m = \frac{2\ p}{2\ y_1} = \frac{p}{y_1}$$

Să stabilim acum cea mai importantă proprietate a parabolei: tangenta la parabolă este bisectoarea unghiului format de dreapta FM și paralela prin M la axa parabolei (fig. 24).

Pentru aceasta stabilim coeficientul unghiular al dreptei FM.

$$m_{FM} = \operatorname{tg}\ \alpha_2 = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}}$$

Este suficient să arătăm că $\alpha_2 = 2\alpha$.

Avem $\operatorname{tg}\ \alpha = \frac{p}{y_1}$, de unde:

$$\operatorname{tg}\ 2\alpha = \frac{2\frac{p}{y_1}}{1 - \frac{p^2}{y_1^2}} = \frac{2\ py_1}{y_1^2 - p^2} = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}}$$

(căci $y_1^2 = 2\ px_1$ și am simplificat cu $2p$).

Întrucît $\alpha < 90$, și $\operatorname{tg}\ 2\ \alpha = \operatorname{tg}\ \alpha_2$, rezultă $\alpha_2 = 2\alpha$.

Proprietatea este importantă, în primul rînd din punct de vedere practic; dacă avem o oglindă parabolică (generată ca formă prin rotirea parabolei în jurul axei sale), ținînd seama de legile reflecției (raza incidentă și raza reflectată formează unghiuri egale cu normala la oglindă — în cazul nostru perpendiculara pe tangenta la parabolă) găsim: orice

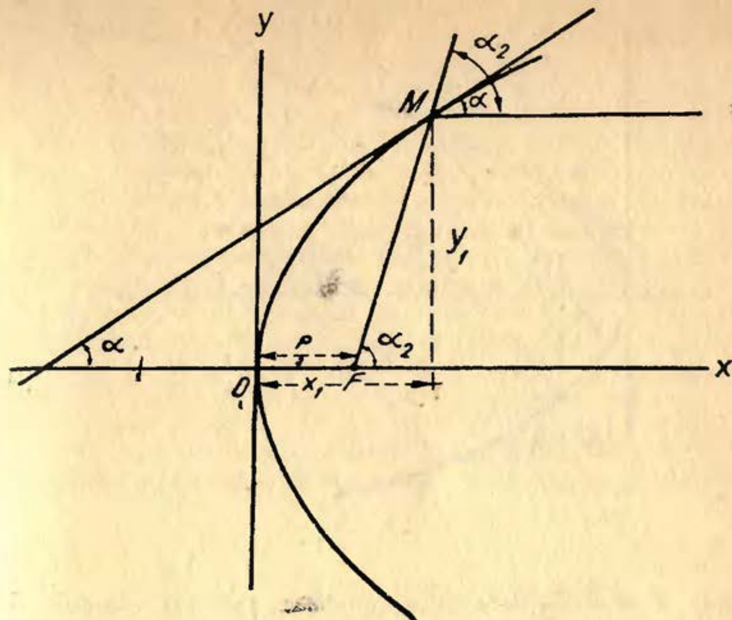


Fig. 24

rază care pleacă din focar se reflectă paralel cu axul oglinzii și invers, orice rază de lumină paralelă cu axa se reflectă trecînd prin focar. În prima formă avem aplicație, de exemplu, la farurile de automobil în care, cu o oglindă parabolică, razele luminoase care pleacă din far se reflectă luminînd o mare porțiune din șosea, în a doua formă avem posibilitatea ca razele care vin de la soare să le „stríngem" într-un punct — proprietate folosită încă de Arhimede.

Să reluăm formula care dă coeficientul unghiular al coardei:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{p}{\frac{y_2 + y_1}{2}} = \frac{p}{Y}$$

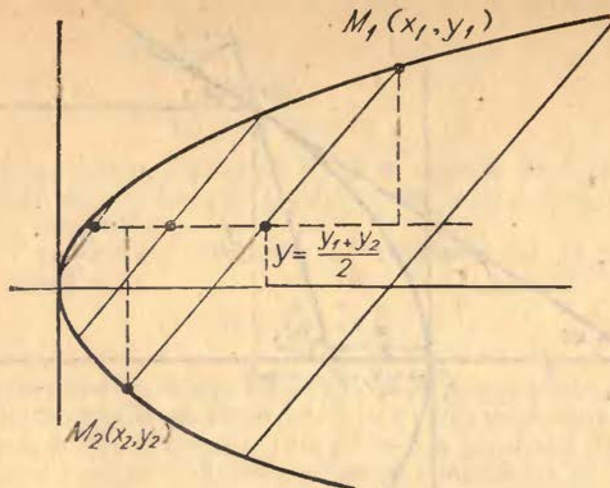


Fig. 25

unde $Y = \frac{y_2 + y_1}{2}$ este ordonata mijlocului coardei. Să presupunem că dreapta $M_1 M_2$ variază păstrînd o direcție fixă; α rămîne același, deci și Y. Găsim: locul geometric al mijloacelor coardelor la parabolă paralele cu o dreaptă dată este o dreaptă paralelă cu axa parabolei (fig. 25).

Comparație între metoda analitică și metoda geometrică

Ecuația $y^2 = 2px$ „închide" în ea toate proprietățile parabolei; problema este de a le dezvălui treptat, tot prin calcule, în care se ține seama de ecuație.
Din punct de vedere geometric pur — deci fără a folosi algebra — toate proprietățile parabolei sînt închise în defi-

niția ei și ele se dezvăluie treptat prin raționamente care țin seama de această definiție.

Să demonstrăm geometric proprietatea optică — pentru a compara demonstrația cu cea analitică dată mai sus.

Pentru a găsi printr-o construcție, pe baza definiției, un punct al parabolei, procedăm astfel: unim F cu un punct D al directoarei, ducem mediatoarea segmentului FD și o intersectăm cu perpendiculara în D pe directoare (fig. 26). M fiind pe mediatoare, avem $MF = MD$, iar MD reprezintă distanța lui M la directoare, pentru că MD este perpendiculară pe ea. Cînd D variază pe directoare, punctul M astfel găsit descrie parabola. Să arătăm că mediatoarea MI *este tangenta* în M la parabolă. Pentru aceasta, vom arăta că orice alt punct N de pe ea nu mai este pe parabolă; în adevăr, avem $ND = NF$ dar ND nu reprezintă distanța de la N la directoare (această distanță este $ND' < ND$). Un singur punct (M) al dreptei MI fiind pe parabolă, dreapta

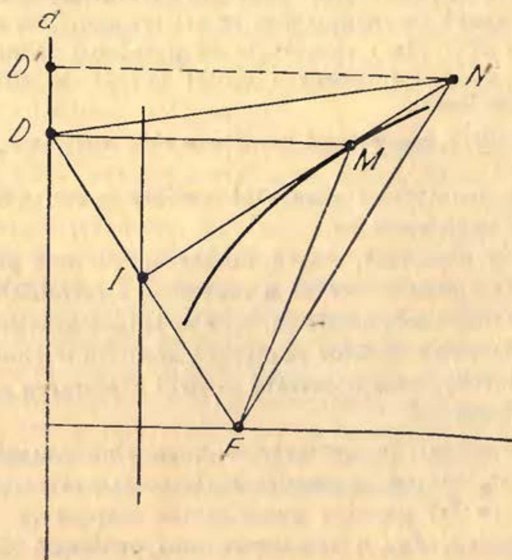


Fig. 26

MI este tangenta în *M* (am admis, fie prin intuiție, fie pe baza unei demonstrații speciale, că o altă dreaptă trecînd prin *M* taie parabola într-un al doilea punct).

Ținînd seama că în triunghiul isoscel *MFD*, mediatoarea *MI* este și bisectoare, rezultă imediat proprietatea optică.

Ca un al doilea exemplu, să ne imaginăm cum se demonstrează că trei drepte sînt concurente. Analitic va trebui întîi să scriem ecuațiile lor, apoi să arătăm că sistemul de ecuații este compatibil. Structura demonstrației *va fi aceeași*, indiferent despre care trei drepte anume este vorba. Să ne amintim cîteva demonstrații despre concurență, în geometrie. Mediatoarele, bisectoarele, înălțimile sau medianele într-un triunghi sînt concurente; dar cele patru demonstrații sînt distincte una de alta, în fiecare se ține seama de ceea ce este *specific* dreptelor respective. Pentru mediatoare și bisectoare, tiparul demonstrațiilor este înrudit — în ambele ținem seama de definițiile acestor drepte ca locuri geometrice. În cazul înălțimilor, ideea este alta: să facem ca înălțimile triunghiului dat să apară ca mediatoare în alt triunghi; în cazul medianelor, o altă idee: să arătăm în prealabil că punctul de intersecție a două mediane e situat la 2/3 de vîrf.

Constatăm deci:

1 — Metodele geometriei analitice sînt uniforme, generale și sigure.

Metodele geometriei pure sînt variate, particulare fiecărui caz și problematice.

Geometria analitică, odată învățată, nu mai pune decît probleme *de aplicare* corectă a metodei, a formulelor.

În geometria pură, oricît de bine ar fi fost învățată, rămîn probleme deschise a căror rezolvare necesită o gîndire creatoare, inițiativă, perspicacitate — deci cercetarea este nesigură, problematică.

2 — Demonstrațiile geometriei pure sînt *cauzale*; interpretăm acest termen în sensul că ele ne fac să înțelegem de unde și în ce fel provine proprietatea respectivă. Ele sînt mai explicative, dau o înțelegere mai profundă și o satisfacție mai mare.

Demonstrațiile geometriei analitice, în multe cazuri, se apropie mai mult de *o verificare* prin care ne convingem că așa este, fără să ne dăm seama de ce este așa. Demonstrăm, de pildă, concurența mediatoarelor verificînd că sistemul celor trei ecuații este compatibil. Sistem compatibil = concurență. Dar care sînt condițiile geometrice care au făcut să ajungem tocmai la un sistem compatibil? Dar ce proprietăți are punctul de concurență? Pe cînd în demonstrația geometrică, ne dăm seama că, în acest caz, concurența provine din faptul că un punct situat pe două mediatoare este la egală distanță de toate cele trei vîrfuri, deci este situat și pe a treia mediatoare.

3 — Care cale — cea algebrică sau cea geometrică — este mai ușoară?

În multe cazuri, demonstrația analitică presupune un volum de muncă mai mare (să scriem ecuații, să le rezolvăm etc.) — însă o muncă ce merge la sigur, pe cînd demonstrația geometrică — *dacă s-a descoperit ideea* — este mult mai scurtă, ușor de cuprins cu vederea într-o clipită.

Există însă și cazuri cînd demonstrația analitică este mai scurtă — ca în exemplul de mai sus cu locul geometric al mijloacelor coardelor paralele.

4 — Gîndirea axată pe raționamente geometrice directe are un pronunțat caracter *euristic*; ea este înclinată *să descopere* noi proprietăți. Pe cînd cele mai multe probleme de geometrie analitică încep cu „să se demonstreze că", fără să se arate în ce mod s-a ajuns la proprietatea care face obiectul demonstrației. O bună parte din volumul geometriei analitice este ocupat cu stabilirea *instrumentului de lucru* (cum se scriu ecuațiile dreptelor în diverse cazuri, discuția ecuației generale de gradul II etc.), astfel că unii din cei care o învață nu mai au timp să se ocupe cu *aplicarea* acestui instrument, uită scopul pentru care a fost creat și îl privesc ca un scop în sine. E aici un aspect al unui fenomen uman mai general, axarea pe problema mijloacelor, uitînd scopul lor inițial.

Totuși, și în geometria analitică pot apare procese euristice, de fapt mai subtile şi deci mai atractive; este vorba de pro-

cesul prin care o formulă algebrică dată *o structurăm* în așa fel încît să se precipite din ea o interpretare geometrică nouă. Ca exemplu, analizați cu atenție prin ce proces de gîndire formula $m = \frac{2p}{y_1 + y_2}$ — statică — conduce de la sine la punerea și rezolvarea unei probleme de loc geometric.

Și, în concluzie, pentru care să optăm? — este o întrebare pe care și-ar pune-o nu numai un tînăr, pe care și-o pun, explicit sau nu, chiar cercuri științifice înalte. Unele facultăți de matematică, nu numai din țara noastră, par a pune problema optării și a opta pentru algebră. Geometria pură ajunge să ocupe în programe un loc din ce în ce mai restrîns. Algebra — în particular algebra mulțimilor și algebra generală, abstractă — împreună cu o teorie generală a spațiilor — cu o generalizare a analizei — constituie, în această optică, fundalul și esența oricărei activități matematice.

În realitatea vie, nu poate fi vorba de o opțiune. Dacă din punct de vedere științific, prin generalitatea și siguranța metodei, geometria analitică constituie un progres esențial față de geometria pură, din punct de vedere psihologic și pedagogic, aceasta își păstrează o valoare proprie, specifică, incontestabilă.

Pentru educarea gîndirii creatoare, investigația geometrică pură rămîne mijlocul *natural*, cel mai eficient, parcă anume făcut în acest scop. De aceea și tinerii de astăzi, ca și acei din generațiile trecute, simt o atracție vie pentru euristică în general, pentru geometria pură în particular. Dar și în acest caz există tendința — naturală, totuși nerecomandabilă — de a transforma mijloacele în scop, de a transforma o acțiune atractivă în sine într-o activitate exclusivă, deci din nou de a opta, de astă dată pentru celălalt capăt al dilemei, pentru geometria pură.

Nu trebuie să optăm, ci să îmbinăm; frumusețea problemelor de perspicacitate și iscusință ale geometriei pure nu trebuie să ascundă eficacitatea și frumusețea de alt ordin a geometriei analitice. Și nici, invers; după cum invenția avionului — un mijloc modern de deplasare — nu exclude

farmecul unui drum pe jos, de pildă într-o ascensiune pe munte, care pune la încercare forța și inițiativa omului natural, tot astfel metodele moderne ale matematicii nu fac inutile problemele vechi de cînd lumea, deci naturale, deci mereu actuale.

Perspectivele geometriei analitice

La prima abordare și în etapa istorică a apariției ei, geometria analitică este nouă prin *metoda* ei. Obiectul e vechi; studiul proprietăților figurilor geometrice. Dar o metodă nouă implică, la început mai ascuns, apoi din ce în ce mai aparent, și lărgirea obiectului de studiu, mai mult: apariția unor probleme cu un conținut nou.

Grecii studiaseră cu predilecție figurile formate din drepte și cercuri ajungînd, prin Apollonius, și la studiul conicelor, ca intersecții plane ale unui con *circular*, precum și, prin Diocles etc., la anumite curbe „mecanice".

Dar dacă, prin geometria analitică, curbă înseamnă în esență o relație de forma $f(x, y) = 0$, cum putem scrie nenumărate astfel de relații, putem lua în studiu un cîmp mult mai vast de curbe. Analog, cînd trecem la geometria analitică în spațiu, o mulțime de suprafețe.

În special, curbele cele mai interesante, inclusiv din punct de vedere practic, sînt *traiectoriile* punctelor în mișcare. Mișcarea însăși o putem studia cu ajutorul unor ecuații. Dacă $x = f(t)$ și $y = y(t)$ — de exemplu, $x = 2t + 1$; $y = \sin t$ — și dacă variabila independentă t reprezintă timpul, pentru fiecare valoare a lui t putem calcula pe x și pe y, deci avem poziția punctului $M(x, y)$ în plan. În fiecare moment, o altă poziție, deci un punct în mișcare.

De unde se va fi inspirat Descartes pentru ideea de a folosi metoda coordonatelor? Ne amintim că secolul al XVI-lea — la sfîrșitul căruia se naște Descartes — este secolul marilor călătorii geografice. Fixarea poziției navei pe ocean — în lipsa reperelor fixe care se găsesc pe pămînt — se face cu

ajutorul coordonatelor, care trebuie mereu determinate, corabia fiind în mișcare, de către astronomul ei.

Deci Descartes nu a creat metoda coordonatelor. Ea există în procesul vieții oamenilor. Oricît de „singulară“ și ruptă de preocupări practice ar părea uneori ocupația matematicianului, ea este legată, prin fire vizibile sau nu, de munca și ideile oamenilor din jur. Cu aceasta, nu se micșorează de loc meritul creatorului. Mulți au ideea de coordonate. Dar folosirea consecventă a acestei idei ca o nouă metodă de demonstrație în geometrie este creația lui, a lui Descartes.

Și această creație nu este numai inspirată de probleme ale vieții, ci va inspira ea, la rîndu-i, rezolvarea unei probleme de viață, de mare și actuală importanță, problema studiului mișcării, problema mecanicii.

Geometria analitică, alături de alte descoperiri ale timpului, alături de alte întrebări care plutesc în aer, vor furniza și interesul dar și materialul de reflecție și metodele de studiu pentru a se trece la punerea și rezolvarea, în ultimul sfert al acestui veac rodnic, a marilor probleme care stau la baza civilizației actuale.

Meritul lui Descartes va fi pus în adevărata lui lumină abia cînd vor apare lucrări noi și importante care — chiar dacă el nu le-a întrevăzut în mod concret — presupun în mod esențial la baza lor acest mod nou și fertil de a gîndi, pe care omenirea, în bună parte, i-l datorează.

FERMAT PIERRE (1601—1665)

Fermat ar putea fi luat ca simbol al pasiunii pure pentru matematică. Viața lui demonstrează că cercetarea matematică se poate desfășura numai prin satisfacțiile intrinseci pe care le oferă, fără să li se adauge satisfacții exterioare ca aceea a invenției unui lucru cu utilitate practică, imediată sau ca aceea a gloriei pe care o dă izbutirea unei performanțe.

Fermat este numit în 1637 consilier al parlamentului din Toulouse, funcție în care rămîne pînă la sfîrșitul vieții. Deci nu există în viața lui evenimente deosebite.

Funcția pe care o are și-o îndeplinește extrem de conștiincios. Rămîne timpul liber; cu ce și-l ocupă?

Nobil — deși de origină mic burgheză — ne-am putea aștepta să-l vedem ca pe alți oameni de teapa lui, la partide de vînătoare, la recepții, țesînd intrigi de curte sau delectîndu-se cu ușoare, uneori spirituale, conversații de salon. Nu. Fermat nu este un monden, trăiește destul de retras. Atunci are poate înclinații burgheze, îngrijește meticulos o grădină sau pasiuni de colecționar. Nici. Fermat își „petrece timpul" făcînd matematică, din plăcerea de a o face și atît îi e deajuns. Vrea poate să-și facă un nume, să strălucească și să rămînă în acest domeniu? Va rămîne, în adevăr, ca un nume strălucit al matematicii, dar nu aceasta vrea, nu acesta este motivul activității sale. El nu se îngrijește să-și publice descoperirile, în multe cazuri nici nu-și găsește timp să le redacteze, să le expună sistematic. Descoperirile lui au fost... descoperite de urmași, schițate pe foi disparate de hîrtie, uneori abia menționate pe marginea cărților pe care le studia. Singurul contact cu lumea este bogata lui corespondență cu matematicienii timpului, izvorîtă nu din dorința de a se pune în evidență, ci, desigur, din nevoia firească a unui schimb de idei. Corespondență, evident, deosebit de prețioasă, în lipsa unor lucrări publicate.

Există totuși un indiciu care arată că Fermat era conștient de valoarea sa și că un imbold al activității sale era, cel puțin cu un anumit coeficient, și emulația cu alți matematicieni.

Într-una din scrisorile sale, în care expune metoda sa, a „coborîrii infinite" și unele rezultate obținute prin ea, el spune:

„Bachet își face o glorie, în comentariile sale asupra lui Diofant, de a fi găsit o regulă în două cazuri particulare. Dau una generală pentru orice fel de caz.

(...) Iată, în mod sumar, povestirea cercetărilor mele în domeniul numerelor. Nu am scris-o decît pentru că mă tem

că nu voi avea răgazul de a expune pe larg toate aceste demonstrații și metode.

(...) Poate că posteritatea îmi va recunoaște un merit din a-i fi făcut cunoscut că cei antici nu știau chiar totul..."

Ultimul citat trebuie să rețină, în special, atenția.

Cultura antică a avut multă vreme un prestigiu atît de mare, încît a inhibat curajul de a gîndi personal, în chip nou și creator, problemele vechi pentru a le depăși, cu atît mai puțin probleme esențial noi. Galileu, Descartes, Fermat sînt printre primii care au rupt zăgazurile înăbușitoare ale unei astfel de servituți. Ceea ce nu înseamnă a ignora, cu atît mai puțin a disprețui, marea comoară a culturii antichității; înseamnă a o îngloba și depăși.

Fermat a citit și comentat pe Diofant. A reconstituit din date disparate scrieri pierdute ale lui Apollonius.

Dar nu s-a mărginit să copieze și să comenteze, a mers mult mai departe, în unele lucrări — ca precursor al Analizei sau în Probabilități — folosind problematica și spiritul timpului său, în altele — cele de teoria numerelor — bazîndu-se în principal pe gîndirea lui personală și pe sugestiile pe care i le dă citirea lui Diofant.

Despre cele din prima categorie vom aminti mai departe. Aici, ne oprim asupra lucrărilor lui privind teoria numerelor.

Teoria numerelor

Teoria numerelor, în sens clasic, este studiul proprietăților numerelor naturale. Baza ei este foarte simplă — căci fiecare știe ce înseamnă 1, 2, 3, 4... sau cele patru operații cu aceste numere — dar teoria în sine cuprinde și probleme foarte grele, unele nerezolvate nici pînă în ziua de astăzi, altele conducînd la demonstrații lungi și complicate în care intervin cunoștințe speciale de analiză — limite, serii, calcule cu aproximație, integrale etc. — deci străine de domeniul la care se referă enunțul; aceasta în ciuda simplității enunțului însuși.

Problemele de teoria numerelor care se rezolvă cu ajutorul analizei formează un sector denumit teoria *analitică* a numerelor.

Un alt sector se numește teoria *algebrică* a numerelor. Problema principală a acestui sector este studiul *resturilor* ce se obțin în împărțirea numerelor printr-un număr dat, m. Fiind posibile m resturi — un număr finit — se obțin proprietăți simple, frumoase, cu o anumită simetrie interioară și a căror demonstrație nu iese din cadrul Aritmeticii.

Teorema lui Fermat. Teorema de bază în teoria algebrică a numerelor, descoperită de Fermat, are enunțul: fiind dat *un număr prim p, oricare ar fi numărul a,* a^p *și a dau același rest în împărțirea cu p.*

Cu o notație introdusă mai tîrziu (1800) de Gauss, enunțul se scrie:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

(în general, $a \equiv b \pmod{m}$, citit a este congruent cu b modul m, înseamnă: la împărțirile lui a și a lui b prin m, se obține *același rest*: exemplu: $16 \equiv 37 \pmod{7}$ căci împărțind pe 16 și pe 37 la 7 obținem în ambele cazuri restul 2).

Pentru a intui mai bine frumusețea teoremei și pentru a face posibilă întrevederea unor teorii care se vor dezvolta ulterior (Euler, Gauss, algebra modernă), să facem verificarea enunțului într-un caz particular, $p = 13$.

Dacă $a^p \equiv a \pmod{p}$, $a^p = p \cdot q + r$, $a = pq' + r$ (același r), deci diferența $a^p - a = p(q - q') = Mp$ (notînd în acest fel un multiplu oarecare de p). Avem de verificat deci că, oricare ar fi a,

$$a(a^{p-1} - 1) = Mp$$

Dacă $a = Mp$, relația este evidentă; pentru ca ea să aibă loc cînd $a \neq Mp$, este necesar ca $a^{p-1} - 1 = Mp$.

De aceea teorema se mai enunță: pentru orice $a \neq Mp$, $a^{p-1} = Mp + 1$ (a^{p-1} dă restul 1 în împărțirea cu p). Fie $p = 13$. Să verificăm că pentru orice $a \neq M\,13$, $a^{12} = M\,13+1$. Există o infinitate de valori posibile ale lui a; le putem verifica pe toate? Da; aici intervine observația că deoarece în

eround este vorba numai despre *resturi* — nu interesează cîtul — avem un număr finit de posibilități.

În adevăr, fie, de exemplu, că dăm lui a valorile 7, $13 + 7$, $2 \cdot 13 + 7$... în general valori de forma $M\ 13 + 7$.

Avem $(M\ 13 + 7)^n = M\ 13 + 7^n$. Putem demonstra această relație fie prin binomul lui Newton, fie succesiv pentru $n = 2$, $n = 3$ etc. S-o demonstrăm, prin a doua metodă, în general. Dacă $a = mc + r$, și $b = mc' + r'$, avem $a \cdot b = (mc + r)(mc' + r') = Mm + rr'$ căci din cei patru termeni obținuți la înmulțirea binoamelor, trei sînt multipli de m, deci și suma lor este Mm. În particular, $a^2 = Mm + r^2$, $a^3 = (Mm + r)(Mm + r^2) = Mm + r^3$, $a^4 = (Mm + r)(Mm + r^3) = Mm + r^4$ etc. În cazul nostru, $m = 13$. Dacă $a = M\ 13 + 7$, $a^n = M\ 13 + 7^n$; înseamnă că a^n și 7^n dau același rest în împărțirea la 13. Dacă am calculat ce resturi dau $7, 7^2, 7^3 \ldots 7^n$, numerele $a, a^2, a^3, \ldots a^n$ (de pildă $20, 20^2, 20^3 \ldots 20^n$) vor da respectiv aceleași resturi. Pe baza acestei observații este suficient să verificăm teorema *pentru numerele mai mici decît 13*. Să verificăm deci că $a^{12} = M\ 13 + 1$ unde $1 \leqslant a \leqslant 12$. Însă calculul puterii a 12^a a unui număr este lung, obținem numere foarte mari (chiar dacă baza puterii este < 13). Vom alege o cale care pare pe moment mai ocolită: să calculăm nu numai restul dat de a^{12}, ci *toate* resturile succesive date de $a, a^2, \ldots a^{11}, a^{12}$. În fond, e o cale mai ușoară pentru că facem calcule numai cu resturile ceea ce dă numere mult mai mici decît dacă am afla efectiv pe a^n. De exemplu dacă am găsit că $7^3 = M\ 13 + 5$ rezultă de aici $7^4 = 7\ (M\ 13 + 5) = M 13 + 35 = M\ 13 + 9$, — fără a fi nevoie să știm cît este 7^4. Procedînd în acest mod și scriind în linia 1^a puterile și în a doua resturile împărțirii lor prin 13, obținem:

7	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	7^{10}	7^{11}	7^{12}
7	10	5	9	11	12	6	3	8	4	2	1

confirmarea teoremei lui Fermat apărînd abia la sfîrșit, cînd obținem $7^{12} = M\ 13 + 1$.

Să facem și verificarea pentru $a = 5$. Obținem:

5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	5^9	5^{10}	5^{11}	5^{12}
5	12	8	1	5	12	8	1	5	12	8	1

Acum restul 1 a apărut prima dată la puterea a patra. Dar modul nostru de calcul ne arată că de aici înainte resturile se repetă periodic, deci vom obține restul 1 și la exponentul 8, și la 12.

Cititorului atras de astfel de chestiuni i se recomandă să facă un tabel complet de resturi pentru $p = 13$, să caute să surprindă pe el anumite regularități, să vadă care din ele ar putea fi demonstrate pentru un număr prim p oarecare. I se deschide astfel perspectiva unor lucrări apărute istoric mai tîrziu, eventual i se pot pune probleme de cercetare personală.

Descompunerea numerelor în sumă de pătrate

Diofant încă observase că un număr de forma $4k - 1$ nu poate fi scris ca suma a două pătrate. În adevăr, din:

$$a^2 + b^2 = 4k - 1$$

rezultă că unul din numerele a și b este par și celălalt impar (cu a și b pari sau a și b impari, suma ar fi pară). Dacă însă $a = 2m$ și $b = 2n + 1$, avem:

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4n + 1 = M4 + 1$$

deci nu putem avea și $M4 - 1$.

Fermat merge mult mai adînc; în primul rînd, el demonstrează că *orice număr prim de forma $4k + 1$ se poate scrie ca sumă de două pătrate, și aceasta în mod unic*. Exemple: $5 = 2^2 + 1^2$; $13 = 3^2 + 2^2$; $17 = 4^2 + 1^2$; $29 = 5^2 + 2^2$.

Urmează teoreme care o completează pe aceasta. Produsul a două numere prime de această formă (care este tot un număr de forma $4k + 1$) se scrie ca sumă de două pătrate *în două moduri*. Exemplu:

$$65 = 5 \cdot 13 = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2$$

descompuneri care se găsesc folosind identitatea:

$$(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) = (aA \pm bB)^2 + (aB \mp bA)^2$$

De aici se poate trece la produsul mai multor numere prime de forma $4k + 1$.

— O sumă de forma $a^2 + b^2$ cu a și b numere prime între ele nu poate avea factori primi de forma $4k - 1$.

— Orice numar poate fi descompus într-o sumă de *cel mult patru* pătrate.

Demonstrația acestor teoreme este mult mai subtilă decît cea din propoziția lui Diofant și este legată de cunoașterea unor teoreme remarcabile, fundamentale, ale teoriei numerelor — în special de teoria resturilor de puteri, despre care am amintit în exemplul numeric de mai sus și de teoria care tratează un caz particular al ei, resturile pătratice (obținute prin împărțirea pătratelor numerelor la un modul dat).

Marea teoremă a lui Fermat — un mister pentru care s-au cheltuit uriașe eforturi matematice

Pe lîngă propoziții în care se afirmă ceva despre toate elementele unei mulțimi (propoziții care se numesc în logică judecăți universal-afirmative) — cum e, de pildă teorema menționată: pentru *orice* număr natural a, $a^p \equiv a(p)$ — Fermat a fost condus în cercetările sale la propoziții universal negative (în care se neagă ceva despre toate elementele unei mulțimi). Cea mai importantă dintre acestea

— vom menționa ulterior în ce fel importantă — este următoarea, cunoscută sub numele de marea teoremă a lui Fermat:

Ecuația $x^n + y^n = z^n$ pentru $n > 2$ nu are nici o soluție în numere întregi.

Teorema a fost găsită printre însemnările făcute pe marginea paginilor din cartea lui Diofant pe care o studia, împreună cu următoarea mențiune: „Dispun de o demonstrație cu adevărat minunată, dar marginile sînt prea înguste ca s-o pot scrie aici."

S-a putut stabili care era demonstrația dată de Fermat în cazul $n = 4$. El folosea o metodă proprie și pe care a aplicat-o și în alte cazuri, metoda „coborîrii infinite". Esența metodei este aceasta: plecăm de la ipoteza că ar exista o soluție s_1; demonstrăm că, în acest caz, există și o soluție s_2 cu numere mai mici; pe baza aceleiași demonstrații și pe baza faptului că există s_2, rezultă că există soluția s_3 cu numere și mai mici etc.; obținem șiruri de numere *naturale* care descresc; existînd un număr finit de numere naturale inferioare unui număr dat, am ajunge astfel la o soluție cu numere destul de mici pentru ca o simplă verificare să arate neexistența soluției. Metoda seamănă întrucîtva cu metoda inducției complete, numai că mersul cercetării este invers.

Mai tîrziu, Euler folosind aceeași metodă a demonstrat teorema pentru $n = 3$. Alți matematicieni, spre jumătatea secolului al XIX-lea, au demonstrat-o pentru $n = 5$, $n = 7$. În fine, în 1849, Kummer — folosind teoria idealelor, teorie care generalizează larg pe aceea de mulțime a multiplilor unui număr — demonstrează că teorema este valabilă pentru orice n, cu excepția acelor valori ale lui n care satisfac o anumită condiție. Nu se știe dacă există astfel de excepții — în orice caz s-a verificat că ele nu există pentru $n < 100$ — de aceea se poate spune că nici acum nu s-a dat o demonstrație *generală*, valabilă, oricare ar fi n.

Foarte mulți mari matematicieni au încercat, fără succes, să descopere această demonstrație generală. Din cauza unui premiu care se instituise înainte de primul război mondial, au apărut și numeroase încercări de demonstrație, făcute de matematicieni mai mici sau chiar de către profani, care

— tentați de simplitatea enunțului — își închipuie că ar putea avea „norocul" să li se ivească „inspirația" unei soluții prin mijloace elementare. Și după dispariția, prin devalorizare, a premiului, problema cîștigase o celebritate atît de mare încît a tentat și tentează și azi pe unii dintre profanii care nu cunosc istoria încercărilor făcute de marii matematicieni în această direcție. Se propun unele false soluții în care greșelile de raționament sînt elementare și vizibile; sînt și unele, mai puține, în care greșelile sînt mai ascunse. Într-o carte intitulată *Erori ale matematicienilor* (Bruxelles, 1935), în care autorul *M. Lecat* a adunat circa 500 de greșeli strecurate în diverse memorii științifice, se includ și 80 de încercări neizbutite de a demonstra teorema lui Fermat, după ce mai mult de 1 000 de astfel de încercări fuseseră lăsate la o parte.

Se bănuiește astăzi că însuși Fermat nu a avut o demonstrație riguroasă și generală a teoremei, ci numai „impresia" de a o fi descoperit și că această impresie ar fi dispărut dacă el ar fi încercat să redacteze complet soluția.

În ce ar consta „importanța" acestei teoreme?

Ea nu are o importanță deosebită în sine, ci mai mult prin eforturile și meditațiile pe care le-a suscitat. Încercările de demonstrație — vorbim numai de acelea făcute de matematicieni mari — au condus la crearea unor teorii — am citat mai sus teoria idealelor — care, deși nu au condus la un rezultat complet în această problemă particulară, s-au dovedit a avea o valoare proprie, constituind capitole importante ale algebrei moderne.

Situația legată de această teoremă dă naștere și unor reflecții de ordin oarecum filozofic. Un mare matematician exclama: este o permanentă sfidare la adresa geniului uman. Alții s-au gîndit să o încadreze în categoria *propozițiilor indecidabile*, înțelegînd prin aceasta propoziții care nu pot fi nici stabilite, dar nici infirmate printr-o demonstrație — fiind însă necesară o demonstrație de ordin logic (și nu numai pe baza insucceselor de fapt) pentru a afirma că o propoziție este indecidabilă, că *nu pot* exista cele două demonstrații pentru afirmarea sau negarea ei.

Din punct de vedere istoric și psihologic, povestea acestei teoreme este semnificativă. Enunțul teoremei nu are mare însemnătate în procesul cunoașterii: demonstrația ei eventuală nu ar aduce probabil vreun folos practic și nici orizontul nostru științific nu ar fi, prin aceasta, cu mult lărgit. Singurul rezultat pozitiv ar fi încetarea acestei „sfidări la adresa geniului uman". Imensele eforturi cheltuite — adesea, risipite — pentru această teoremă arată că alături de mobilurile principale ale activității matematice — tensiunea pentru cunoaștere și aplicații, atracția pentru problematic, pentru soluții simple și elegante — funcționează și un fel de mobil al ambiției — acesta însă mult mai puțin fructuos decît mobilurile originare, naturale.

Numerele prime ale lui Fermat

Fermat a fost condus la considerarea numerelor prime de forma $p = 2^m + 1$ (exemple: $5 = 2^2 + 1$; $17 = 2^4 + 1$). Se stabilește ușor teorema: *dacă $2^m + 1$ este prim, atunci m este o putere a lui 2*. Dăm demonstrația, interesantă prin faptul că în loc de a demonstra teorema în forma dată ($2^m + 1$ este prim) $\Longrightarrow m = 2^\alpha$, demonstrăm contrara reciprocei:

(m nu e de forma 2^α) $\longrightarrow 2^m + 1$ nu este prim

care este echivalentă logic cu teorema dată (cititorul care nu o cunoaște încă, să reflecteze asupra acestei echivalențe).

În adevăr, dacă numărul m nu este o putere a lui 2, admite un divizor impar și putem scrie $m = 2^k \cdot i = a \cdot i$; în acest caz

$$2^m + 1 = (2^a)^i + 1 = b^i + 1 = (b + 1)\,(b^{i-1} - b^{i-2} \ldots + 1)$$

are divizorul $b + 1$ și deci nu este prim.

Propoziția reciprocă celei date are enunțul:

Dacă $m = 2^\alpha$, numărul $2^m + 1$ este prim.

Este ea adevărată? Pentru $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$, găsim numerele 3; 5; 17; 257; 65 537 care sînt prime. Se pare că Fermat a bănuit pe baza acestor cazuri că propoziția este valabilă în general. Pentru a arăta că propoziția reciprocă este valabilă (în care caz s-ar numi teoremă) ar fi necesară o demonstrație; pentru a arăta că *nu* e valabilă (adică nu *totdeauna*, nu *în mod necesar* dacă $m = 2^{\alpha}$, $2^m + 1$ este prim) este suficient să se dea un exemplu care o infirmă. Acest exemplu a fost dat de Euler; el a arătat că pentru $\alpha = 5$, se obține numărul $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ care *nu* este prim, fiind egal cu $641 \times 6\,700\,417$.

Ulterior, s-au găsit și alte valori ale lui α pentru care $2^m + 1$ nu este prim; numerele de această formă cresc vertiginos, astfel încît fiecare caz nou necesită probleme de cercetare speciale — nefiind vorba numai de verificarea prin calcul cu care sîntem obișnuiți la descompunerea în factori primi a numerelor „mici".

Importanța numerelor prime de această formă va fi pusă în evidență de Gauss (1777—1855).

Gauss a arătat că pot fi construite cu rigla și compasul poligoanele regulate al căror număr n de laturi este $n = p = 2^m + 1$, p prim, precum și acelea pentru care $n = 2^k \cdot p \cdot p_1 \ldots$ unde $p, p_1 \ldots$ sînt numere prime de forma indicată. Acest rezultat a fost surprinzător: nu putem construi poligonul cu 7 sau 11 laturi, dar îl putem construi pe cel cu 17 laturi, cu 257 de laturi... Demonstrația a dizolvat misterul; tocmai pentru că $p = 2^m + 1$, ecuația zisă de diviziune a cercului se reduce la o serie de rezolvante de gradul II și rădăcinile ecuației de gradul II pot fi construite (se cunoaște suma și produsul).

Gauss a arătat *în general* cînd o construcție se poate face cu rigla și compasul, a demonstrat că „problemele celebre" ale antichității (pe care le-am menționat la sfîrșitul cap. II), care dăduseră atît de mult de lucru *nu* intră în această categorie — închizînd astfel definitiv încercările de a căuta o astfel de construcție. Este unul din titlurile de glorie ale acestui „prinț al aritmeticii". Drept omagiu al posterității,

soclul monumentului de la mormîntul său are baza un poligon cu 17 laturi.

*

Vedem deci că toate cercetările lui Fermat și-au găsit, în veacurile următoare, continuări și dezvoltări în teorii frumoase, astfel încît el poate fi pe drept considerat părintele teoriei numerelor. Și în Analiză, și în Probabilități, Fermat este un precursor.

Mare prin soluțiile pe care le-a dat, Fermat este și mai important prin problemele pe care le-a *deschis*.

PASCAL BLAISE (1623—1662)

Pe Descartes îl solicită două tendințe divergente, cultura și cariera armelor; există însă un singur moment de cumpănă — e drept, emoționant — după care decizia pentru prima devine definitivă.

Pascal rămîne toată viața în aria culturii. Dar aici, înăuntrul ei, există două solicitări pe direcții diferite și care vor conduce la două personalități ale unei singure ființe fizice; Pascal, matematicianul și fizicianul; Pascal, moralistul. Iar cumpăna nu mai e a unui moment; e lupta dramatică a unei vieți întregi — o viață scurtă dar densă, de o rară plenitudine interioară.

Și Descartes, după ce a optat pentru cultură, este filozof *și* matematician. Dar cele două ipostaze nu reprezintă direcții diferite, una *continuă* pe cealaltă — chiar și fizic, de vreme ce geometria este și în forma dată de tipar o anexă a Discursului. Filozofia lui Pascal nu are contingență cu opera lui științifică. Viața lui este o *pendulare* între filozofie și știința exactă. Cu excepționale talente în ambele domenii, cînd optează pentru filozofie, uită de matematică și invers.

Figura lui Pascal este reprezentativă pentru însăși condiția umană. Există în Om, două tensiuni fundamentale: cunoașterea naturii; cunoașterea vieții umane; privirea ațintită spre exterior; spre el însuși. Dar „Omul" se divide în oameni; *unii* evoluează spre și în primul din cele două planuri, își definesc personalitatea prin el; *alți* oameni se lasă antrenați de preocupări de ordin moral și se definesc prin ele. Se mai întîlnesc unii cu alții? Sau trăiesc ca două subspecii distincte ale speciei om?

Se pare că nu se mai întîlnesc; chiar în acest caz atît de rar cînd cele două tensiuni solicită un același om fizic — și Pascal este desigur, cazul cel mai reprezentativ — se creează două personalități în două planuri coexistente, dar paralele, lipsite de contact, între care acel om fizic pendulează, neîmpăcat.

Problema — gravă, mare — care se pune umanității: cele două tensiuni fundamentale rămîn în mod necesar izolate, diviziunea în subspecii este o fatalitate?

Cultura de azi pare a răspunde da. Mai mult: pare a da prioritate absolută primei. Cultura de mîine va căuta desigur o soluție mai adîncă; va înlocui pendularea istorică între umanistic și științific printr-o sinteză superioară.

*

Pentru explicarea fenomenului Pascal, condițiile în care a copilărit au o pondere specială. Trebuie, cel puțin menționate.

Mama lui Pascal moare cînd acesta avea 3 ani; el și cele două surori, una (Gilberte) mai mare cu 3 ani, cealaltă, Jacqueline, cu 2 ani mai mică, rămîn în îngrijirea tatălui (Etienne). Înalt magistrat (consilier al regelui), Pascal-tatăl era și un mare iubitor de cultură; el dădea și o mare atenție educației copiilor săi — două motive care îl determină ca în 1631 (deci cînd Pascal avea 7 ani) să se stabilească la Paris.

Aici își formează un cerc de discuții, din care fac parte și matematicieni mari ca: Roberval (precursor în calculul integral), Mersenne (cercetător în teoria numerelor), Desar-

gues (creatorul geometrici proiective). Din acest cerc ia naștere, în 1635, printr-o decizie a lui Richelieu, Academia din Paris.

În privința educației copiilor, se hotărăște să le-o dea în casă. În programul copilului Pascal se află la început numai studiul limbilor. Dar el aude o dată cuvîntul geometrie și întreabă pe tatăl său ce înseamnă; explicațiile sînt, evident, foarte sumare: un studiu despre dreaptă și cerc, despre figuri... Pascal, care avea 12 ani, cu curiozitatea excitată de faptul că acest studiu nu e în programul lui, ba chiar stimulat poate de o astfel de interdicție, se apucă *să caute singur* în ce ar consta geometria. Descoperă numai prin propria-i gîndire primele 32 de propoziții din Euclid, inclusiv suma unghiurilor în triunghi.

Faptul face senzație. Evident, în această situație, i se dă un manual. Mai mult: este chemat în cercul științific, unde, privit ca un fenomen, i se pun întrebări, i se cere să pună el însuși întrebări — unele punînd în încurcătură pe savanții vremii.

Un copil-minune, de o precocitate extraordinară.

Totodată, o problemă pedagogică dintre cele mai spinoase; și, cum priceperea oamenilor în pedagogie este foarte relativă chiar în cazuri obișnuite, această problemă nu va primi soluția cea mai fericită, deși există cele mai bune intenții sau poate tocmai din această cauză.

Pascal a dat lucrări importante — ca efect al marilor sale posibilități înăscute. Pascal a dat însă mai puțin decît ar fi permis aceste posibilități — din cauza educației care i s-a dat. Uimirea pe care a provocat-o, l-a făcut conștient de geniul său, i-a creat o încredere în propriile-i forțe, ideea că trebuie să exceleze în toate.

Încrederea în propriile-i forțe este o condiție pozitivă, esențială pentru activitatea matematică — evident, dacă nu se depășește un anumit prag. Ideea că trebuie să exceleze în toate; aici trebuie să căutăm poate origina muncii excesive care i-a distrus sănătatea. Toată viața Pascal a fost un suferind; dureri atroce de cap — într-o vreme cînd antinevralgicele nu fuseseră descoperite; dureri de stomac în

așa măsură încît uneori nu putea bea apă decît picătură cu picătură și fierbinte.

În aceeași idee se află poate și înclinările lui spre trăiri de ordin religios; nemulțumit cu religia oficială oarecum adaptată la necesitățile vieții, el va fi atras de o sectă mai severă, a janseniștilor, în care caută, probabil, „o perfecțiune" într-un astfel de plan, avînd totodată și satisfacția nemărturisită de orgoliu, de a fi pe o poziție deosebită față de „toată lumea". Un impuls cu mare pondere spre religie severă îi dă și prietenia lui strînsă, împinsă pînă la adorație reciprocă, cu sora lui, Jacqueline, care are oarecum o fire înrudită: precoce în alt plan — face versuri la 13 ani care îi sînt prezentate reginei, obține succese de curte prin care îl salvează pe tatăl lor dintr-o dizgrație — are și ea setea „depășirii" și „perfecțiunii morale" și, în 1652, se călugărește.

Să revenim la expuneri de fapte.

La 16 ani, Pascal scrie o lucrare asupra conicelor, în care se află și vestita lui teoremă: cele trei puncte în care se intersectează laturile opuse ale unui exagon înscris într-o conică sînt colineare (fig. 27).

La 18 ani, în 1641, construiește prima mașină de calcul. Tatăl său fiind numit administrator al impozitelor la Rouen are de făcut foarte multe socoteli, pînă tîrziu în noapte; e situația care îl determină la această invenție.

În 1647 publică *Experiențe noi în privința vidului*, lucrare de mare succes, pe care o continuă cu noi cercetări prin care demonstrează experimental variația presiunii cu altitudinea, echilibrul lichidelor, inventează presa hidraulică — fără a părăsi nici cercetările matematice.

În 1650 părăsește cercetările științifice și se consacră studiilor religioase, împins spre aceasta și de împrejurarea că în casa lor sînt chemați doi „medici" pentru a vindeca de o fractură pe Pascal-tatăl, partizani înverșunați ai doctrinei lui Jansenius.

În 1652, își reia cercetările științifice (triunghiul aritmetic, probabilități) și duce și o viață de „om de lume", fiind primit în anturajul ducelui de Roannez, unde cunoaște

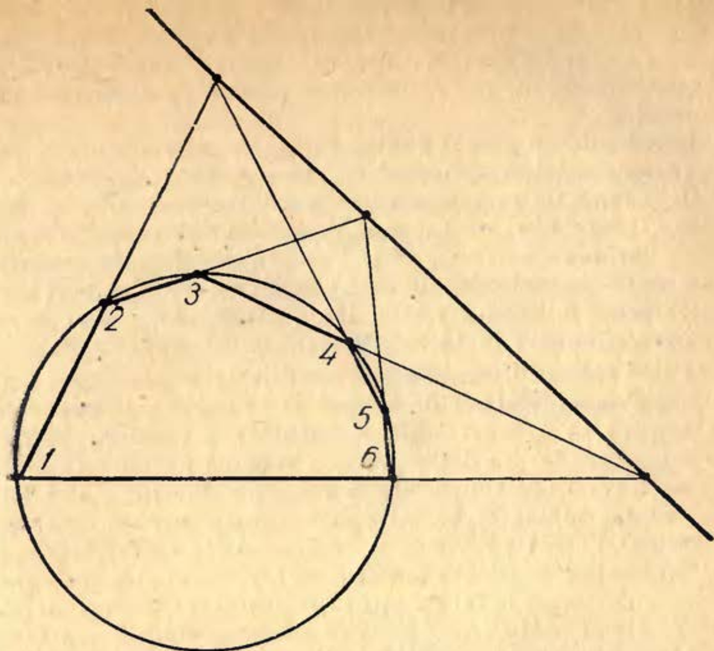


Fig. 27

şi pe cavalerul de Méré, care îi propune vestita problemă asupra jocului, origina calculului probabilităţilor.

23 noiembrie 1654, o dată crucială în viaţa lui Pascal. Vede, cum se zice, moartea cu ochii; caii de la trăsura în care era, trecînd pe podul Neuilly, se sperie, îşi iau vînt, hăţurile nu-i mai pot reţine, sar peste parapetul podului; un moment de groază, căci se pare că vor duce şi trăsura după ei, dar — minune — ştreangurile se rup, trăsura rămîne pe parapet, viaţa lui Pascal este salvată.

Salvată, dar îndreptată din nou spre preocupări religioase, acum şi mai accentuate, aproape exclusive. Are o noapte de trăire mistică, exaltată; scrie pe un pergament evenimentul pe care l-a trăit, „revelaţia puterii lui Dumnezeu" şi

coase pergamentul în căptușeala hainei, ca să poată să și-l amintească mereu. Apoi se retrage din lume, la Port Royal, unde va rămîne pînă la sfîrșitul vieții, în august 1662. În tot acest timp, nu mai dă matematicii decît o lucrare, despre *cicloidă*.

În schimb, în cursul anului 1656, Pascal scrie opera care îl va face celebru ca moralist: *Scrisori către un provincial*. Prilejuită de un proces pe care Facultatea de teologie a Sorbonei îl face unei scrieri considerată eretică și de polemica ce se aprinde cu acest prilej, Pascal intervine, în ianuarie, cu o astfel de scrisoare, apoi pe măsura desfășurării polemicii (excluderea autorului eretic din Sorbona etc.), adaugă noi scrisori, ajungînd la 16 la sfîrșitul anului, apoi la 19.

O altă lucrare filozofică a sa, publicată postum, este intitulată *Pensées* (Reflecții). În prefață se arată că Pascal avea în mintea sa o construcție sistematică a lucrării, pe care însă moartea nu i-a dat răgaz să o traducă în fapt. Încă din prima frază a acestei prefețe se exprimă regretul (!) că Pascal nu s-a consacrat în întregime acestui gen de cercetări. „Domnul Pascal părăsind de tînăr studiul matematicii, al fizicii și al altor științe profane, în care făcuse un mare progres, (...) începu la 30 de ani să se ocupe cu lucruri *mai serioase și mai înalte* (s.n.) și să se consacre numai, atît cît îi permitea sănătatea, studiului Sfintei Scripturi, profeților și Moralei Creștine".

Desigur, anumite aspecte ale acestor două lucrări, în special polemica pe chestiuni teologice între două secte ale aceleiași religii, și-au pierdut azi interesul. Rămîn însă interesante o sumă de reflecții despre condiția umană, despre morală; rămîne ca o valoare nepieritoare stilul său, model de formă literară, expresivă, închizînd un fond de idei bogat. De aceea, multe din frazele lui au cîștigat o circulație de proverb: „Curioasă justiție, pe care un rîu sau un munte o mărginește. *Adevăr dincoace de Pirinei, eroare dincolo*!" Sau: „Omul nu e decît o trestie, cea mai slabă din natură dar e *o trestie gînditoare*."

Pentru noi, este demnă de toată atenția distincția pe care o face între *l'esprit de finesse* (spiritul de finețe) și spiritul

geometric. Există o problematică nuanțată și subtilă, în domeniul vieții psihice, pe care nici gîndirea strict logică, nici expunerea „more geometrico" nu o pot cuprinde fără să o usuce, care rămîne deci în seama „spiritului de finețe". Azi, cînd, pe baza succeselor matematicii în variate domenii, se tinde sau se pretinde a se matematiza și întreaga psihologie, distincția pe care o făcea Pascal, acest adînc cunoscător al matematicii și fin cunoscător al naturii umane, este bine să fie reamintită.

Și la Pascal, ca și la Descartes, mai importante decît realizările sînt direcțiile pe care ei le deschid. În particular, la Pascal-moralistul, multe din soluțiile pe care le dă nu sînt valabile. Problematica pe care o abordează rămîne însă de interes viu și actual — probabil de interes crescînd în viitor.

CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

„Cum să îndrăznim a vorbi despre legile hazardului? Hazard nu înseamnă ceva opus oricărei legi?" — sînt cuvinte de început ale unui tratat de calculul probabilităților (Bertrand).

Înainte de a vorbi despre legi, să vorbim despre fapte — și cele mai elocvente le găsim în istorie.

Cum să împărțim miza?

Aceasta este prima problemă de probabilități, care s-a pus și s-a rezolvat înainte de a exista o disciplină matematică cu acest obiect.

Un jucător pune lui Pascal (în 1654) următoarea problemă: un joc este compus din trei partide (*A* și *B* pun pe masă sume

de bani egale; ia toți banii acel care cîștigă întîi trei partide, indiferent dacă partenerul are două, una sau nici una cîștigate); jocul s-a întrerupt cînd A avea două partide și B una. Cum este drept să se împartă miza?

Pascal rezolvă problema și — pentru că între el și Fermat era un schimb activ de scrisori în legătură cu cercetările lor matematice — i-o comunică și lui. Fermat dă o soluție printr-o metodă diferită de a lui Pascal, însă cu același rezultat. Această corespondență — deși publicată mai tîrziu — este considerată ca origina teoriei probabilităților.

Rezultă că și acei care nu au învățat nici elementele acestei teorii — care sînt deci exact în situația lui Pascal și Fermat — pot înțelege (eventual chiar redescoperi) soluțiile date. Ca și ei, nu vom rezolva numai problema dată, ci — așa cum e natural pentru gîndirea matematică — problema generală: jocul are p partide; se întrerupe cînd A are m și B, n partide.

Nu avem a ne sprijini raționamentul pe nici o axiomă sau definiție sau teoreme anterioare; numai pe „bunul simț", pe afirmații despre care toată lumea să cadă de acord că sînt juste.

Un elev, căruia i-am propus problema, a propus întîi o soluție greșită: să împărțim suma s în părți proporționale cu m și n, $\frac{s_1}{m} = \frac{s_2}{n} = \frac{s_1 + s_2}{m + n}$. Se vede ușor că nu e just, făcînd $n = 0$, de unde $s_2 = 0$ și $s_1 = 3$. Ar însemna că A, deși nu a cîștigat p partide să ia toată suma. Același elev a făcut însă o afirmație justă. Ar fi simplu dacă ar fi $m = n$. Dacă A și B au același număr de partide, este cum nu se poate mai drept să-și împartă suma în părți *egale*. Dacă...; dar nu e așa, m este diferit de n.

Raționamentul lui Pascal. E foarte probabil că în mintea lui Pascal a apărut întîi aceeași idee: *dacă* ar fi $m = n$... În urmărirea acestui deziderat, iată soluția: fie $p = 3$, $m = 2$, $n = 1$.

Să admitem că *s-ar mai juca o partidă*. A și B au *șanse egale* să cîștige această partidă ipotetică.

1) Dacă o cîștigă A, el face cu ea 3 partide și ia toată suma s.

2) Dacă o cîștigă B, el face 2 partide, egal cu A, deci își împart suma: B ia $\frac{s}{2}$, A ia $\frac{s}{2}$.

În cazul 1, avem A ia $\frac{s}{2}+\frac{s}{2}$ și B ia 0

În cazul 2, avem: A ia $\frac{s}{2}$ și B ia $\frac{s}{2}$.

În ambele cazuri A ia suma $\frac{s}{2}$, în mod cert. Rămîne nedecisă a doua jumătate a sumei s pe care o ia cu *șanse egale* sau A sau B. Deoarece partida în plus nu se joacă, acest $\frac{s}{2}$ nedecis trebuie împărțit în părți egale (căci șansele asupra ei sînt egale).

Rezultat: A ia $\frac{s}{2}+\frac{s}{4}=\frac{3}{4}s$; B ia $\frac{1}{4}s$

Fie acum $p=3$, $m=2$, $n=0$.

Să admitem, și în acest caz, că s-ar mai juca o partidă.

1) Dacă o cîștigă A, el face 3 partide și ia toată suma s.

2) Dacă o cîștigă B, ajungem la cazul precedent, A ia $\frac{3}{4}s$ și B $\frac{1}{4}s$.

În ambele cazuri, A ia $\frac{3}{4}s$, *în mod cert*; suma în discuție este $\frac{1}{4}s$ care se împarte în părți egale.

Rezultat: A ia $\frac{s}{2}+\frac{s}{4}+\frac{s}{8}$; B ia $\frac{s}{8}$

Cu totul analog se tratează cazul p partide, $m=p-1$, $n=p-2$, apoi $n=p-3$, $p-4$ etc. Îl lăsăm deci ca exercițiu pentru cititor; idem cazul $m=n-2$ etc.

Raționamentul lui Fermat (în cazul $p=3$, $m=2$, $n=1$).

Dacă s-ar mai juca *două* partide, jocul s-ar sfîrşi cu siguranţă. Ele pot avea ca rezultat:

$$AA \quad AB \quad BA \quad BB$$

şi aceste 4 rezultate au şanse egale să apară. În primele 3 cazuri, jocul e cîştigat de A; numai într-un caz, al 4-lea, jocul e cîştigat de B. Şansa lui A de a lua suma s este de *3 ori* mai mare ca a lui B. Deci dacă jocul s-a întrerupt, lui A se cuvine de 3 ori cît lui B, adică A ia $\frac{3}{4}s$ şi B ia $\frac{1}{4}s$.

În această problemă, s-a impus luarea în consideraţie a două noţiuni fundamentale pentru ceea ce va deveni mai tîrziu *Teoria probabilităţii*: 1) noţiunea de probabilitate ca măsură a şansei de a cîştiga într-un joc; 2) ce valoare are o sumă de bani *incertă*, a cărei posesie depinde de o anumită şansă.

Probabilitatea ca măsură a şansei

Urna ca model. Există felurite jocuri: cu zaruri, loto, cu cărţi de joc etc. Este mai comod să vorbim de unul singur, un joc-tip: urna; într-o urnă (sau într-un sac) se pun n bile — *identice* ca mărime şi la pipăit — a dintre ele albe, restul negre. Imaginăm jocul: scoatem o bilă *la întîmplare* (deci, fără a privi în urnă şi după ce am amestecat bine bilele); cîştigăm dacă scoatem bilă albă. Ce şansă de cîştig există?

Asimilăm alte jocuri cu acesta. Dacă dintr-un pachet de 52 de cărţi tragem una şi cîştigăm dacă ea este as, *e ca şi cînd* în urnă ar fi 52 de bile dintre care 4 albe (în cărţi există 4 aşi). Dacă jucăm cu un zar şi cîştigăm dacă el cade cu faţa 1 sau 5, e ca şi cînd ar fi o urnă cu 6 bile (cele 6 feţe ale zarului) şi dintre care 2 albe (feţele 1 şi 5 ale zarului).

Cazuri imediate, de bun simţ. Sînt cazuri simple, în care putem afirma imediat dacă două şanse sînt egale, sau dacă nu, care din ele este mai mare. E suficient „să ne facem" că vrem să jucăm. Astfel: 1) într-o urnă sînt 10 bile, 5 din

ele albe și 5 negre. Joci cu mine, tu să cîștigi dacă iese albă și eu dacă iese neagră? Putem juca, căci *șansele sînt egale*; 2) sînt 12 bile, 4 albe și 8 negre, joci? Cu albele, nu joc. Este evident, că șansa de a scoate alb este de două ori mai mică decît de a scoate negru. (Am putea juca dar nu cu mize egale; cel care joacă cu alb să pună 1 leu și cel cu negru să pună 2 lei. Cel cu alb își dă seama că va cîștiga *mai rar*, deci, în compensație, cînd se întîmplă să cîștige, să ia un cîștig mai mare. Chestiunea valorii mizei o lăsăm însă pentru puțin mai tîrziu.)

Condiția ca bilele să fie absolut identice, scoaterea unei bile să fie *absolut întîmplătoare*, este esențială și o vom presupune mereu îndeplinită (de un zar care nu-i perfect cubic, de un joc de cărți în care unele se cunosc pe spate etc. nu ne ocupăm). Admitem deci că fiecare bilă din urnă are aceeași șansă de a ieși.

Definiție. Probabilitatea de a scoate o bilă albă dintr-o urnă care conține n bile identice, dintre care a sînt albe, este raportul $p = \frac{a}{n}$.

Vedem că probabilitatea astfel definită este *un număr* care măsoară *șansa* de a scoate bila albă.

Dacă toate cele n bile sînt albe, $a = n$, obținem $p = 1$ și în acest caz *e sigur* că bila scoasă este albă. Deci, probabilitate $= 1$ înseamnă *certitudine*. În general, $p < 1$; dacă p este aproape 1, de exemplu $p = 0{,}99$, aceasta înseamnă o probabilitate foarte mare, traduce pe „aproape sigur“ — în mod exact înseamnă că din 100 de bile, 99 sînt albe. Dacă $p = \frac{1}{2}$, înseamnă că *jumătate* din bile sînt albe, deci probabilitatea de a scoate alb este egală cu aceea de a scoate nealb. Dacă $p = 0$, înseamnă că $a = 0$, nici o bilă nu e albă; $p = 0$ înseamnă tot o certitudine: *sigur* că nu iese o bilă albă.

Ce probleme pune această noțiune? Să numărăm niște bile? Să facem un raport? Prea simplu.

Să arătăm acum că sînt niște „bile“ care se numără mai greu și tocmai această numărătoare pune probleme.

Un joc mai complicat

Să presupunem că avem k urne, $U_1, U_2, \ldots, U_k$; fiecare urnă conține n bile numerotate de la 1 la n. Scoat m cîte o bilă din fiecare. Ce probabilitate există ca printre cele k bile scoase să existe două (cel puțin) cu același număr?

Dar, pentru că am definit probabilitatea numai pentru o urnă, să punem problema altfel: fie $k = 30$ și $n = 365$; joci cu mine — la miză egală — astfel ca să cîștigi tu dacă printre cele 30 de bile există o coincidență și să cîștig eu dacă toate au numere diferite? Cineva mi-a răspuns: nu joc; ar însemna un noroc prea mare cînd există 365 de numere și eu scot 30, să se nimerească 2 egale. Apoi, a întors-o; joc, a spus, dar eu să cîștig cînd bilele au numere diferite și să pierd cînd două au același număr.

Acest răspuns arată că intuiția singură ne poate înșela. S-au jucat 20 de partide de acest fel. Acel care a mizat pe bile diferite a cîștigat numai de 6 ori, iar cel care a mizat pe coincidențe a cîștigat de 14 ori! S-o fi întîmplat — o fi avut noroc prea mare, veți zice. Nu. Nu-i nevoie de o experiență, se poate numai prin judecată arăta că șansa de a avea coincidențe este mai mare decît aceea de a nu avea. Dar pentru aceasta, trebuie să știm să numărăm „bilele". Prin „bile" înțelegem acum toate combinațiile posibile iar prin „bilă albă", acele combinații formate numai din bile diferite.

1) *Toate combinațiile.* Din U_1 putem scoate (cu șanse egale)

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n.$$

Din U_2, de asemenea. Din U_1 și U_2 putem scoate

$$\begin{matrix} 1, 1 & 2, 1 & \ldots & n, 1 \\ 1, 2 & 2, 2 & & n, 2 \\ 1, 3 & 2, 3 & & n, 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, n & 2, n & & n, n \end{matrix} \qquad \text{total } n^2.$$

Din U_1, U_2, U_3, putem scoate: lîngă *fiecare* combinație din $U_1\ U_2$ punem pe rînd fiecare din numerele 1, 2, ,,... n. De exemplu:

1, 1, 1	1, 2, 1	Deoarece în U_1U_2 sînt n^2 grupe
1, 1, 2	1, 2, 2	și din fiecare se formează n,
1, 1, 3	1, 2, 3	vom avea în total $n^2 \cdot n = n^3$
⋮	⋮	combinații
1, 1, n	1, 2, n etc.	

Trecem la $U_1\ U_2\ U_3\ U_4$. La fiecare grupă din $U_1\ U_2\ U_3$ alăturăm pe rînd 1, 2. ..., n. Din fiecare grupă se formează n grupe, din n^3 se vor forma $n^3 \cdot n = n^4$. Se vede că, la fiecare urnă nouă, numărul combinațiilor se înmulțește cu n, deci la k urne vom avea n^k grupe posibile de cîte k numere. „Bilele" astfel formate sînt identice, adică fiecare combinație are aceeași șansă de a ieși. În adevăr dacă am scos din U_1, bila 1, lîngă ea poate veni cu șanse egale 1, 2, ..., n; deci combinațiile din $U_1\ U_2$, 1,1 1,2 1,3 ... 1,n au aceeași șansă. Analog judecăm mai departe.

2) Să numărăm acum cîte combinații de bile diferite putem forma. În $U_1\ U_2$ avem următoarele combinații de bile diferite:

1, 2	2, 1	. . .	n, 1
1, 3	2, 3	. . .	n, 2
⋮	⋮		⋮
1, n	2, n	. . .	n, $n-1$

în total $A_n^2 = n(n-1)$ (tabelul are n elemente pe o linie și are $n-1$ linii).

Trecem la $U_1\ U_2\ U_3$. Pentru a găsi combinații de bile diferite, lîngă fiecare din grupele de la A_n^2 punem pe rînd *numai numerele care lipsesc*. De exemplu:

1, 2,	3	1, 3,	2
1, 2,	4	1, 3,	4
⋮		⋮	
1, 2,	n	1, 3,	n

Dintr-o grupă de două iau naştere $n-2$ grupe de cîte 3, deci numărul grupelor de 3 (îl vom nota A_n^3) este $A_n^2 \cdot (n-3) = n(n-1)(n-2)$. La fel găsim $A_n^4 = A_n^3 (n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)$ etc. $A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots [n-(k-1)]$ (k factori descrescători începînd cu n).

În cazul numeric $n = 365$, $k = 30$, obţinem probabilitatea p ca o grupă să conţină numai numere diferite

$$p = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots \cdot 336}{365^{30}}$$

Făcînd calculul (cu ajutorul logaritmilor căci nu avem nevoie decît de o zecimală exactă; logaritmii îi găsim uşor fiind toţi la rînd), obţinem $p \approx 0{,}3$. În medie, din 10 combinaţii, 3 nu au coincidenţe şi deci 7 au. Cine mizează pe lipsa de coincidenţe — aşa cum propunea interlocutorul nostru pe baza unei false intuiţii — e ca şi cînd ar miza pe bilă albă cînd într-o urnă sînt 10 bile din care 3 albe.

Trecem la a doua problemă, valoarea unei sume incerte.

Cît costă un bilet de loterie

La un bal, cineva dintre organizatori strigă: Cu numai 2 lei puteţi cîştiga un tort în valoare de 100 de lei. Cine mai cumpără? Un bilet, 2 lei!

— E convenabil, spune un tînăr prietenului cu care era; să luăm şi noi cîte un bilet.

— Convenabil? Depinde, răspunde prietenul, care era matematician.

— Cum? Numai cu 2 lei... Tortul face 100...

— Să-ţi explic, îi spune matematicianul. Şi aşa dansul s-a întrerupt, din cauza loteriei. Te distrez, explicîndu-ţi. Iată, pe scurt, explicaţia care a urmat.

Cu 2 lei nu cumperi tortul, ci o anumită şansă de a-l avea. Ca loteria să fie justă, trebuie ca ea să ofere exact tot atît cît primeşte. Ea oferă tortul = 100 lei. Ea pri-

meşte 2 lei · n; n fiind numărul biletelor. Dacă $n = 50$ e justă. Probabil că n este mai mare ca 50; organizatorii îşi scot în acest mod o parte din cheltuielile cu muzica etc. Ca distracţie, putem juca, dar pun problema teoretic.

Dacă sînt 50 de bilete, probabilitatea de cîştig este $\frac{1}{50}$. Costul unui bilet este o sumă certă, 2 lei îi dai sigur. 100 lei (valoarea tortului) este pentru mine o sumă incertă, nu-i sigur că o am; mai bine-zis o am cu probabilitatea $\frac{1}{50}$. Jocul este în acest caz echitabil, căci:

$$2 \text{ lei (cert)} = 100 \text{ lei (incert)} \times \frac{1}{50}$$

În general, valoarea certă V a unei sume S, pe care o vom avea numai cu probabilitatea p este $V = S \cdot p$.

Dacă loteria oferă mai multe cîştiguri, s_1, s_2, s_3 cu probabilităţile respective p_1, p_2, p_3, valoarea unui bilet — făcînd abstracţie de cheltuielile şi cîştigul loteriei — este:

$$V = s_1 \cdot p_1 + s_2 \cdot p_2 + s_3 \cdot p_3$$

căci e ca şi cînd am cumpăra trei bilete, unul care vizează cîştigul s_1 cu probabilitatea p_1, altul care vizează pe s_2, altul pe s_3.

Se ocupă această disciplină, teoria probabilităţilor, numai cu jocuri, mai simple sau mai complicate, şi cu stabilirea mizei echitabile? Nu!

Aplicaţii

Unele fenomene ale realităţii *se asimilează* cu extracţia bilelor din urnă şi li se aplică calcule de probabilităţi făcute aici.

Exemplu. Care este probabilitatea ca într-o clasă de 30 de elevi să găsim doi născuţi în aceeaşi zi (luna şi ziua)?

Acum, după ce am făcut problema cu cele 30 de urne, nu vom mai spune: ar fi o coincidență prea mare.

În adevăr; pentru un elev sînt posibile 365 date ale nașterii: *dacă admitem că ele se repartizează pur întîmplător*, e ca și cînd barza care l-a adus pe lume a extras cu ciocul dintr-o urnă cu 365 de bilete, pe care erau scrise cele 365 de date posibile, unul oarecare. Sînt 30 de elevi, respectiv 30 de urne. După calculul făcut cu urnele, probabilitatea să existe doi elevi cu aceeași dată a nașterii este 0,7.

Este just să admitem că datele se repartizează pur întîmplător. Aceasta nu mai e o problemă de matematică, ci *de aplicare a matematicii*, justețea ipotezei nu mai poate fi stabilită decît experimental.

De exemplu, o astfel de ipoteză ar fi *nejustă* dacă ar fi vorba de datele de naștere ale oilor, știut fiind că mieii se nasc primăvara și nu la date răspîndite pe tot anul.

Interesant este că s-a putut aplica teoria probabilităților nu numai la fenomene *întîmplătoare*, ci și la fenomene mecanice strict determinate. Să considerăm moleculele dintr-un gaz închis. Mișcarea lor, a fiecăreia din ele, e perfect determinată. Dacă un supermatematician ar cunoaște la un moment dat masele celor n molecule, pozițiile lor și vitezele lor, ar putea calcula — prin teoreme de mecanică de care vom vorbi în alt capitol — traiectoria fiecăreia și deci poziția fiecăreia în orice alt moment, din viitor sau din trecut. Aceasta numai în principiu. Practic, n este atît de mare, viteza la un moment dat atît de greu de măsurat, încît acest calcul devine imposibil. Admițînd însă că fenomenul decurge *la întîmplare* (ciocniri întîmplătoare, viteze distribuite ca direcții și ca intensitate întîmplător etc.) și aplicînd calculul probabilităților se ajunge la rezultate care concordă perfect cu cele stabilite pe cu totul altă cale (prin termodinamică) sau cu cele experimentale.

În fizica atomică, folosirea probabilităților este și mai profundă.

Să revenim însă la ordinea istorică, pentru a arăta primele aplicații făcute.

Este o problemă analogă loteriei, în care însă în loc de probabilitatea pură, a unei bile scoasă dintr-o urnă, avem un fenomen aleatoriu pe care îl asimilăm cu extracția dintr-o urnă.

Problema simplificată este următoarea: X se adresează societății de asigurare S cu propunerea: dacă mor de azi într-un an să plătiți copilului meu 10 mii lei. Cît trebuie să vă plătesc ca să acceptați? Dacă acesta este un caz izolat, S nu știe ce să răspundă. S știe că are de plătit 10 mii lei, dar aceasta este o sumă incertă — o plătește numai în caz de deces — în schimbul ei trebuie să ceară o sumă certă.

Să admitem însă că sînt mulți oameni care fac o cerere analogă. Atunci S studiază tabelele de mortalitate. Să admitem că X are 60 de ani și că din aceste tabele rezultă că în medie, din 20 de oameni în vîrstă de 60 de ani numai unul moare înainte de a împlini 61 de ani. Interpretăm aceasta astfel: probabilitatea ca un om de 60 de ani să moară înainte de a împlini 61 de ani este 1/20. Acum socoteala pe care și-o face S este clară. Dacă are 20 de clienți în aceleași condiții ca și X, ea cere fiecăruia 500 de lei; deci ea obține 500 lei · 20 = 10 mii lei și în schimb va plăti prin decesul unuia din ei — nu se știe anume al cui — tot 10 mii lei (și aici, pentru simplificare, nu am ținut seama de dobînzi, cheltuieli generale ale societății etc.).

Avem, ca și în cazul loteriei:

valoarea (certă a asigurării) = suma plătită × probabilitatea de a o plăti.

Aici, însă, probabilitatea rezultă dintr-un fenomen statistic.

Problema este puțin mai complicată dacă în loc de condiția „deces de azi într-un an" se pune condiția: să se plătească 10 mii lei în momentul decesului și în loc de o rată fixă se plătește o rată anuală.

Abstracție făcînd de dobînzi, suma ratelor plătite trebuie să fie egală cu despăgubirea.

Admitînd că ratele se plătesc anual, suma plătită sub formă de rate este:

$$r + r \cdot p_1 + r \cdot p_2 + \ldots r_n p_n$$

A doua rată se plătește dacă X trăiește un an, deci are valoarea $r \cdot p_1$, unde p_1 este probabilitatea de a trăi încă un an; rata următoare are valoarea $r \cdot p_2$, unde p_2 este probabilitatea (mai mică) ca asiguratul să mai trăiască doi ani etc. (Evident, n este finit, probabilitatea de a mai trăi încă 100 de ani sau mai mult este nulă.)

Este oare corect procedeul de mai sus de a stabili probabilitatea de deces după tabelele de mortalitate? Din nou, o problemă de aplicare practică — deci necesitînd verificări de fapt — a noțiunii. În perioade de stabilitate demografică, e corect. Altfel, nu. Dacă într-o perioadă din trecut bîntuia ciuma, evident probabilitatea de deces devenea brusc mult mai mare. Invers, într-o perioadă ca aceea de astăzi din țara noastră, condițiile de viață și îngrijirea deosebită a sănătății fac ca media de viață să fie în creștere, deci probabilitatea de deces în scădere.

Frecvență — probabilitate

Fie o urnă cu 40 de bile, din care 10 albe. Să facem o serie de extracții, punînd de fiecare dată bila înapoi. Dacă în n extracții a apărut bilă albă de a ori, raportul $\frac{a}{n}$ se numește frecvența apariției bilei albe. Pentru valori destul de mari ale lui n, este foarte probabil ca frecvența să ia o valoare foarte apropiată de probabilitate. În cazul nostru, probabilitatea este $\frac{1}{4}$; dacă facem sute de extracții frecvența va oscila în jurul valorii de 25%. Pentru un număr mic de extracții, de pildă pentru 4 extracții nu este exclus ca bila albă să nu apară de loc (frecvența zero)

sau să apară de două ori (frecvența 50%) — deci frecvența diferită mult de probabilitate.

Am vorbit mai sus de probabilitatea ca într-o clasă de 30 elevi să fie doi născuți în aceeași zi și am găsit-o 0,7. Ar fi interesant să facem o verificare. Nu o vom face la 1—2 clase, ci la cel puțin 10. Teoretic în 7 din ele vom găsi coincidențe; practic găsim fie în 7, fie în 6 sau în 8. E foarte puțin probabil ca abaterea să fie mai mare (dacă totuși este, vom mări numărul claselor în care facem experiența).

Am formulat aici — în termeni foarte vagi — așa-numita *lege a numerelor mari*, extrem de importantă pentru aplicațiile teoriei probabilităților.

Date istorice

Am vorbit despre creatorii teoriei. Cîteva cuvinte despre dezvoltarea ei. În 1713 Jacques Bernoulli publică *Arta conjecturii*, în care stabilește legea numerelor mari. În 1718, Moivre publică *Teoria hazardului*. În ambele lucrări se aduc și completări de analiză combinatorie — atît de necesară în calculele de probabilități. Într-o ediție ulterioară, din 1738, Moivre adaugă un capitol despre *Rentele viagere*. Se numește „rentă viageră" o sumă plătită periodic pentru tot timpul vieții; evident, valoarea tuturor ratelor depinde de probabilitatea de deces. Noțiunea fusese pregătită în special printr-o lucrare anterioară a lui E. Halley din 1694, intitulată *Evaluare a gradelor mortalității umane*.

După apariția și răspîndirea analizei matematice, aceasta își găsește importante aplicații și în teoria probabilităților. Printre acestea, un loc deosebit ocupă *Teoria erorilor de observație*; aceasta va fi perfectată abia la începutul secolului al XIX-lea, de către Gauss.

Capitolul VII

O RAMURĂ NOUĂ ŞI CEA MAI PUTERNICĂ A MATEMATICII: ANALIZA

Privire generală

Am putea împărţi domeniul actual al matematicii în trei sectoare mari: 1 — matematica elementară, cuprinzînd geometria euclidiană împreună cu geometria analitică; aritmetica şi algebra în sens restrîns ca ştiinţe ale calculului cu numere — deci, în esenţă, matematica creată pînă în secolul al XVII-lea; 2 — matematica provenită din rafinarea şi generalizarea matematicii elementare — incluzînd aici: geometrii neeuclidiene şi axiomatica geometriei; algebra modernă, în care calculul cu numere este înlocuit prin studiul *structurilor* algebrice (unde intervin calcule cu elemente *oarecare* şi cu operaţii în care se folosesc numai proprietăţile lor formale, de tipul acelora din calculul cu numere); teoria mulţimilor şi logica matematică; 3 — analiza matematică şi domeniile derivate sau legate de ea.

În acest ansamblu, analiza ocupă un loc cu totul specific. În primul rînd acest loc este mare ca suprafaţă. Folosind nişte cifre-metaforă, am putea spune că în pregătirea matematică a absolventului facultăţii de matematică 50% este analiză, iar în aceea a inginerului sau fizicianului coeficientul analizei este 70—80%.

În al doilea rînd, noţiunile de bază ale analizei o disting net de matematica de la punctele 1 şi 2 (ceea ce nu înseamnă că analiza nu foloseşte calcule cu numere sau figuri geometrice; le foloseşte însă într-un mod nou, specific).

Analiza apare istoric imediat după matematica elementară şi înainte de restructurarea acesteia, care are loc abia în secolul al XX-lea. Succesiunea în timp nu corespunde aici cu nişte grade de înrudire. Axiomatica geometriei şi a algebrei înoadă un fir evolutiv; ele derivă direct, filial am zice, din matematica elementară. Pe cînd analiza este o „specie" nouă de matematică (înrudită desigur cu algebra elementară, dar într-o înrudire mai mult colaterală decît filială).

Un loc specific ocupă analiza şi din punctul de vedere al legăturii cu practica sau, mai larg, cu procesul de cunoaştere a realităţii. Nimeni nu contestă folosul calculului aritmetic sau al cunoştinţelor elementare de geometrie în probleme practice. Aceste discipline *s-au născut* în cadrul practicii. Dar au evadat repede din acest cadru şi s-au dezvoltat mai mult impulsionate de mobiluri psihologice, prin pasiunea de a construi probleme în care este vorba de implicaţii logice ascunse, prin ceea ce am numit atracţia pentru problematic. Asemănarea figurilor are desigur şi aplicaţii practice; dar sute şi mii de probleme de geometrie în care e vorba de a stabili fel de fel de proprietăţi (concurenţe, puncte conciclice etc.) ale unor figuri special construite pentru a avea proprietăţi multe şi ascunse, nu exclud unele legături cu practica, dar nu în această legătură constă esenţa lor. Analog, în aritmetică. Orice om trebuie să ştie să adune şi să scadă, cel puţin pentru a şti să se descurce cînd merge la piaţă. Dar cui foloseşte faptul că există o infinitate de numere prime de forma $7k + 1$? E aceasta o teoremă frumoasă, e greu de demonstrat şi, din nou, nu este exclus să aibă cîndva, undeva, un folos; ba poate chiar, indirect, un folos practic. Dar nu prin căutarea acestui folos sau a unui folos de alt ordin s-a născut şi a interesat această teoremă.

Alta este situaţia analizei. Ea nu e de folos nici la piaţă şi nici în trasarea planului unui teren. Legătura ei cu problematica şi procesul cunoaşterii realităţii este mult mai profundă. Este adevărat că premergătorii şi pregătitorii analizei erau antrenaţi mai mult de curiozităţi pure, de ordin matematic, dar naşterea propriu-zisă a analizei are loc în strînsă legătură cu o problemă de cunoaştere. Totuşi, în

momentul apariției ei nu se văd toate posibilitățile pe care le închide. Secolele XVIII și XIX de dezvoltare a analizei vor aduce la lumină aplicații din ce în ce mai numeroase și mai frumoase ale analizei și mereu „uimitoare"; mereu o exclamație și de surpriză și de încîntare în fața succeselor multiple ale unui instrument matematic, la început neprecis și lipsit de puritate logică, dar cît de fertil!

*

Problemele esențiale, de bază, ale analizei sînt: 1) aflarea tangentei la o curbă, în particular a punctelor de maxim și de minim; 2) aflarea ariilor mărginite de linii curbe.

În dezvoltarea analizei, se disting trei etape mari:

I) Perioada pregătitoare (pînă la Newton) în care cele două probleme sînt tratate de la caz la caz, numai pentru anumite curbe mai simple, fiecare curbă reprezentînd o problemă nouă, metoda de rezolvare fiind legată de condițiile particulare ale problemei respective.

II) Crearea calculului diferențial și integral de către Leibniz și Newton, *ca metode generale* de rezolvare a celor două probleme.

Stabilirea legăturii acestor probleme cu problema mecanicii raționale, de către Newton.

Dezvoltarea teoriilor în care se pun noi probleme legate de cele de bază: ecuații diferențiale, serii, reprezentarea funcțiilor prin serii, funcții de variabilă complexă. Aplicarea acestor teorii în studiul curbelor și suprafețelor, în numeroase și fundamentale probleme de fizică.

III) Aritmetizarea, fundarea logică riguroasă a analizei — etapă care începe cu Cauchy în secolul al XIX-lea.

Perioada a II-a o încheie pe prima, căci existența unei metode generale face inutile metodele particulare.

Perioada a II-a se întrepătrunde cu a III-a. Căci problemele de sistematizare, deși se pun atunci cînd cele de cercetare sînt *în linii mari* încheiate, nu împiedică ci ajută dezvoltarea în continuare, completarea teoriilor și aplicațiilor *paralel* cu clarificarea lor sau cu generalizarea lor.

În general, mersul istoric al gîndirii în matematică ne ajută să înțelegem mai profund ideile ei actuale dar și invers, logica actuală ne ajută să înțelegem evoluția istorică.

În privința analizei, nu putem înțelege etapa a III-a (idei actuale) decît prin prisma etapei a II-a — dezvoltarea istorică a ideilor. Dar nu putem înțelege prima etapă istorică, decît prin prisma ideilor realizate în a doua etapă.

Vom începe, deci, prin schițarea ideilor de bază în spiritul etapei a II-a — schiță necesară mai ales cititorului care nu a început încă studiul analizei.

IDEI DE BAZĂ

Noțiunea de derivată

În figura 28 am reprezentat grafic funcția $y = x^3 - 3x + 1$, iar în figura 29 funcția $y = x^2$, dînd lui x cît mai multe valori, calculînd valorile corespunzătoare ale lui y și punîndu-le pe desen, așa cum se procedează pentru orice grafic (de ex., în figura 28, pentru $x = 2$, obținem $y = 3$, deci de la punctul 2 al axei Ox, ne ridicăm în sus cu 3 unități). Deoarece la fiecare valoare a lui x corespunde o valoare bine determinată a lui y, spunem că y este funcție de x.

Observăm pe aceste grafice că pe anumite intervale funcția crește, pe alte intervale scade. În figura 28 punctul $M(-1, +3)$ este un punct de *maxim*, pentru că — imaginîndu-ne că x crește continuu — cît timp el crește pînă la $x = -1$, funcția crește, iar cînd x trece de -1, funcția scade; în raport cu valorile vecine, pentru $x = -1$, y ia cea mai mare valoare.

Cum putem găsi punctele de maxim și de minim? Cum putem găsi intervalele în care funcția crește, respectiv descrește? În ce intervale funcția crește *mai repede*? Dacă luăm pe axa Ox intervale egale, de pildă de cîte o unitate, constatăm că pe intervalul 2—3, funcția crește de la 3 la 19 (deci cu 16), iar pe intervalul următor 3—4, funcția crește

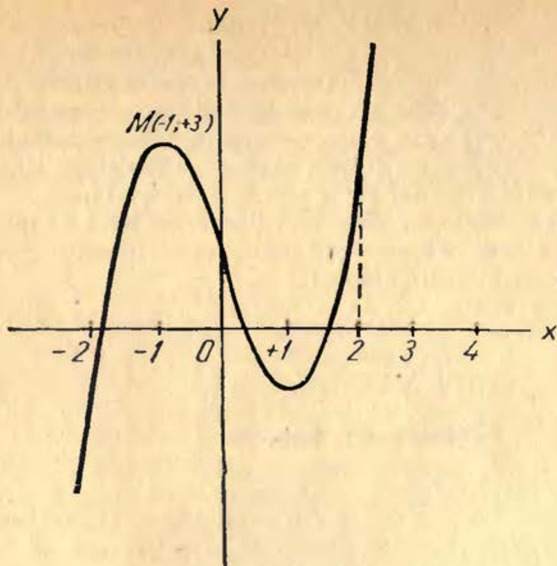


Fig. 28

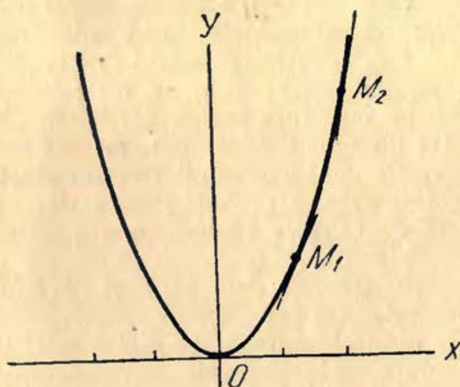


Fig. 29

de la 19 la 53 (deci cu 34 de unități) etc. și constatăm că funcția *crește din ce în ce mai repede*. Cum putem caracteriza rapiditatea de creștere într-un punct?

La aceste întrebări răspunde noțiunea de derivată. Ultima întrebare este cea mai subtilă și o putem înlocui cu una mai concretă: cum putem determina înclinarea *tangentei* la curbă într-un punct — căci înclinarea tangentei ne va da și rapiditatea de creștere (în M_2 fig. 29, funcția crește mai repede decît în M_1, căci tangenta este înclinată față de axa Ox cu un unghi mai mare).

Cum caracterizăm înclinarea? Dacă α este unghiul unei drepte cu axa Ox (cu direcția ei pozitivă), numim *panta* dreptei numărul $m = \operatorname{tg} \alpha$. Este mai ușor să se evalueze panta, decît direct unghiul α. Și în viața practică, de pildă pentru a arăta cît de înclinat este un drum față de planul orizontal, se spune 3 la mie (sau 5 la mie sau 1 la 100 etc.) înțelegîndu-se prin „3 la mie“ că pe distanța de 1000 de metri, urcăm cu 3 m, deci în fond se arată că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1000}$.

Panta tangentei o numim derivată și o notăm y'_{x_0} cînd ne referim la punctul de abscisă x_0 sau y' sau $\frac{dy}{dx}$ pentru un punct oarecare.

Ca să determinăm panta tangentei, începem prin a determina panta coardei care trece prin două puncte învecinate, apoi facem ca al doilea punct de intersecție să se apropie de primul pînă se confundă cu el și vedem ce se întîmplă cu panta.

Să revedem cum am făcut acest lucru cînd am avut nevoie de panta tangentei la parabolă (pag. 130).

Ca un nou exemplu, să aflăm panta tangentei în punctul de abscisă x_0 la curba din figura 28.

Întîi panta unei coarde:

$$m_c = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{x^3 - 3x + 1 - (x_0^3 - 3x_0 + 1)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} - 3 \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2 - 3$$

Cînd punctul M se apropie de M_0, adică x se apropie de x_0, x^2 se apropie necontenit de x_0 — cum se poate vedea studiind separat funcția $f(x) = x^2$ — de asemenea xx_0 se apropie de $x_0^2 \cdot x$. Cînd M se confundă cu M_0, obținem panta tangentei m:

$$m = 3x_0^2 - 3.$$

Ca verificare intuitivă, să dăm lui x_0 diferite valori și să comparăm calculul cu ce arată figura; de pildă, pentru $x_0 = 1$, $m = 0$, tangenta la curbă este paralelă cu Ox; pentru $x_0 = 2$, $m = 9$. în punctul $x_0 = 2$, dacă desenăm tangenta și dacă desenul este exact, obținem o dreaptă cu panta 9, deci aproape „verticală" etc.

Evident, dacă nu considerăm o problemă izolată, dacă ne punem problema generală a aflării tangentelor la orice curbe, pentru a nu relua de fiecare dată calculul, se stabilesc reguli generale de derivare (cum se derivează o sumă, un produs, o putere etc.) — dar acestea nu mai sînt idei, ci simple probleme de *sistematizare a calculelor*.

O altă problemă care rămîne deschisă este *precizarea* ideii, astfel ca ea să poată fi mînuită pe cazul general. Oare orice curbă are tangentă în orice punct? Să admitem că lucrăm numai cu cele care au. Oare la orice curbă coarda *se apropie* mereu de tangentă, pe măsură ce x se apropie de x_0? În figura 30, nu; dar nu pot fi și curbe mai complicate ca aceasta?

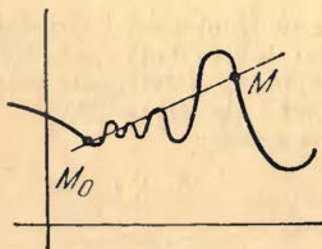


Fig. 30

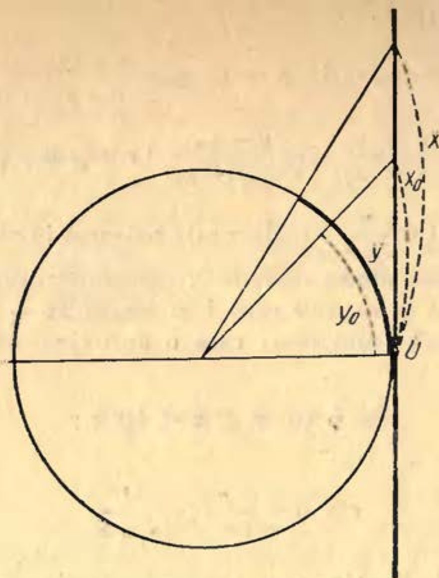


Fig. 31

Cum s-ar putea preciza noțiunea „se apropie necontenit și treptat", pentru astfel de cazuri?

Evident, că într-o primă etapă, cînd avem în vedere nu cazul *cel mai* general care poate fi *imaginat*, ci acel general care poate fi *întîlnit* în sensul că însumînd toate cazurile frecvente în fizică — putem lucra cu ideea de bază, așa cum se prezintă, simplu, în astfel de cazuri.

Să considerăm acum un exemplu în care nu avem funcția reprezentată grafic printr-o curbă și ne punem problema de a afla derivata ca limita raportului $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. Fie $y = \text{arc tg}\, x$, definită cu ajutorul figurii 31. La o valoare a lui x căutăm arcul $\left(\text{între } -\frac{\pi}{2} \text{ și } +\frac{\pi}{2}\right)$ care are ca tangentă pe x.

Din $y = \text{arc tg}\, x$ rezultă $x = \text{tg}\, y$.

Avem, deci:

$$x - x_0 = \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y_0 = \frac{\sin (y - y_0)}{\cos y \cos y_0}$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{\sin (y - y_0)} \cdot \cos y \cos y_0$$

Însă raportul $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$, unde α este măsurat în radiani, tinde (descrescînd) la 1 cînd α tinde la 0. (Demonstrație: exprimînd aria sectorului de cerc de rază 1 și unghi 2α — figura 32 — și a celor două triunghiuri care o aproximează prin lipsă și adaos:

$$\sin \alpha \cos \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha;$$

deci:

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

cînd α tinde la 0, atît $\cos \alpha$ (crescînd) cît și $\frac{1}{\cos \alpha}$ (descrescînd), tind la 1; deci tot la 1 o cantitate cuprinsă între $\cos \alpha$ și $1/\cos \alpha$.)

Obținem deci:

$$\lim m = \cos^2 y_0$$

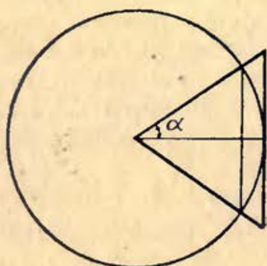


Fig. 32

Însă din $x_0 = \operatorname{tg} y_0$ rezultă $\cos^2 y_0 = \frac{1}{1 + x_0^2}$.

Aşadar, derivata funcţiei $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ în punctul x_0 este $y_0' = \frac{1}{1 + x_0^2}$ $\left(\text{într-un punct oarecare } x \text{ avem } y' = \frac{1}{1 + x^2}\right)$.

Aflarea tangentei la o curbă pare o simplă „curiozitate“ tipic matematică, gratuită, încă nu ne dăm seama în ce fel o astfel de chestiune închide în ea, în stare potenţială, sursa unor vaste aplicaţii, la care făceam aluzie mai sus. Încă 2 exemple ne vor face, cel puţin într-o mică măsură, mai apropiată această perspectivă.

Viteza la un moment dat

În multe situaţii practice este suficient să folosim noţiunea de *viteză medie*. Cînd spunem că cineva a făcut cu bicicleta 3 ore de la Bucureşti la Ploieşti (60 km), înţelegem că a mers cu 20 km pe oră — *în medie*. E o cifră care ne informează „în mare“, dar care nu ne spune nimic despre detalii; sigur că biciclistul pe anumite porţiuni a mers cu *peste* 20 km/oră, în schimb pe altele a mers cu *mai puţin*, dar nu ştim cu cît *peste* sau *sub*, în ce loc şi cît timp a mers cu 25 km/oră, în ce loc şi cît timp a mers cu 0 km/oră (s-a odihnit) etc. Cînd dăm viteza medie, în fond noi imaginăm o mişcare *uniformă*, care are comun cu mişcarea reală faptul că se face pe aceeaşi distanţă şi în acelaşi interval de timp, fără să ţinem seama de loc de deosebirile între cele două mişcări.

Evident că în alte situaţii şi în special în studiul ştiinţific al mişcării, noţiunea de viteză medie nu este suficientă. Trebuie să ştim în fiecare moment ce viteză are mobilul. Dar ce înseamnă viteză *la un moment dat?* Kilometrajul maşinii ne arată că *acum* mergem cu 80 km/oră, pentru ca puţin mai tîrziu, la o intersecţie cu un drum lateral, să indice

20 km/oră. Ce reprezintă aceste cifre? 80 km/oră înseamnă că dacă *mașina ar merge tot așa*, într-o oră ar face 80 km. Ar merge tot așa — este, evident, o exprimare vagă („simțim" cam ce vrea să spună) și ea trebuie precizată.

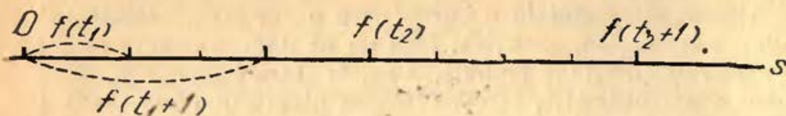


Fig. 33

Să presupunem că se dă legea mișcării, deocamdată rectilinie, $s = f(t)$. Acum mișcarea *este dată* în întregime, putem calcula pe s pentru *fiecare* valoare a lui t. Să considerăm două momente t_1 și t_2 (fig. 33), precum și momentele „următoare" $t_1 + 1$ sec $t_2 + 1$ sec. În intervalul t_2, $t_2 + 1$ mobilul a parcurs mai mult decît în intervalul t_1, $t_1 + 1$. Viteza la momentul t_2 este ea mai mare? Nu se știe; poate că din $f(t_2)$ a pornit încet și numai după 1/2 secundă și-a mărit mult viteza. Viteza medie în intervalul t_2, $t_2 + 1$ este 4 cm/sec, iar în primul interval 2 cm/sec. Deci vitezele medii nici pe intervale „mici" nu lămuresc problema. Este nevoie de o noțiune *nouă*. Considerăm viteza medie în intervalul t_1, t

$$V_m = \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$$

și aflăm *limita* ei atunci cînd t tinde la t_1.

Definim viteza *la momentul* t_1 ca fiind limita vitezei medii în intervalul t_1, t cînd intervalul tinde la 0.

Este exact problema pe care am avea-o dacă am reprezenta funcția $s = f(t)$ printr-o curbă (în planul axelor Ot, Os) și am căuta coeficientul unghiular al tangentei în punctul t_1, $f(t_1)$. Prin definiție, deci, viteza la un moment dat este *derivata* funcției care exprimă mișcarea. Importanța acestei noțiuni pentru aplicațiile analizei la mecanică este ușor de întrevăzut — în capitolul următor vom arăta-o pe cea care este, istoric, cea mai importantă.

O problemă de maxim

Dintr-un buștean se taie o grindă (în formă de paralelipiped). Cum trebuie tăiat, pentru ca grinda să aibă o rezistență cît mai mare. Se știe că rezistența grinzii așezată orizontal este proporțională cu lățimea și cu pătratul înălțimii (de pildă o scîndură așezată pe muchie rezistă mai bine decît dacă o așezăm pe lat — dar legea exactă rezultă din măsurători precise).

Fie x lățimea necunoscută (fig. 34), deci $i = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$R = kxi^2 = kx(a^2 - x^2) = ka^2x - kx^3$$

Prin procedeul arătat, obținem $\frac{dR}{dx} = ka^2 - 3\ kx^2 = k(a^2 - 3x^2)$.

Variația lui R este arătată în figura 35. În punctul de maxim tangenta este paralelă cu axa Ox, derivata în acest punct fiind nulă (și este pozitivă pe porțiunea crescătoare unde $\longrightarrow \alpha < 90^\circ$, deci $\operatorname{tg} \alpha > 0$; negativă pe porțiunea în care funcția descrește, unde $\alpha > 90^\circ$, deci $\operatorname{tg} \alpha < 0$). Deci maximul rezistenței are loc pentru $x = \frac{1}{\sqrt{3}} a$ și deci $i = \sqrt{\frac{2}{3}} a$.

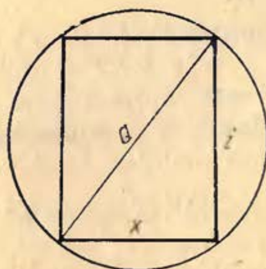


Fig. 34

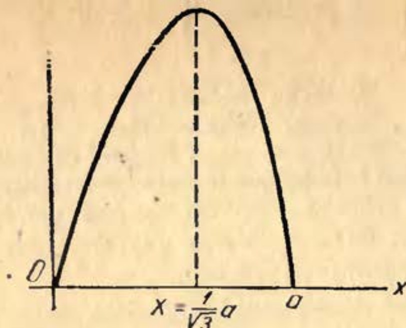


Fig. 35

O problemă de volum

Să ne imaginăm că parabola $y = x^2$ se roteşte în jurul axei Oy (fig. 36); obţinem un corp numit *paraboloid de rotaţie* (ca o căciulă cu vîrful în jos, în O). Să tăiem paraboloidul cu un plan orizontal P şi să calculăm volumul porţiunii astfel determinate. Evident că acest volum V este o funcţie de x (abscisa punctului de intersecţie a parabolei cu planul P); dacă x creşte, planul P este mai sus, în P_1, şi volumul creşte şi el cu porţiunea de paraboloid cuprinsă între P şi P_1.

Să aflăm derivata funcţiei $V(x)$. Dacă h este creşterea lui x, creşterea lui y este $k = (x + h)^2 - x^2 = 2\ hx + h^2$; creşterea volumului, ΔV este cuprinsă între doi cilindri: unul, interior, avînd raza bazei x, al doilea exterior, avînd raza bazei $x + h$, înălţimea ambilor fiind k. Avem deci:

$$\pi x^2 \cdot k < \Delta V < \pi(x + h)^2 \cdot k$$

$$\pi x^2(2x + h) < \frac{\Delta V}{h} < \pi(x + h)^2\ (2x + h)$$

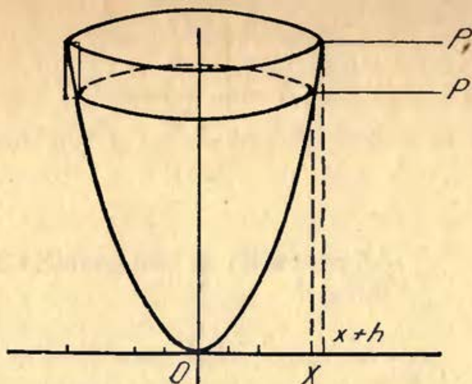


Fig. 36

Făcînd pe h să tindă la 0, obținem:

$$\frac{dV}{dx} = V'(x) = 2\pi x^3$$

Știm acum derivata și vrem să aflăm funcția;

Avem și $V(0) = 0$. Singura funcție care are ca derivată $2\pi x^3$ și se anulează pentru $x = 0$ este $V(x) = \frac{1}{2}\pi \cdot x^4$.

Dacă punem x în loc de a, pentru a marca faptul că este vorba de o porțiune dată, nu variabilă, a paraboloidului, avem $V = \frac{1}{2}\pi a^4$.

Problema inversă aflării derivatei

Există multe alte situații în care cunoaștem întîi derivata unei funcții și numai cu ajutorul ei aflăm însăși funcția. Exemplu. Să presupunem că viteza unui mobil este proporțională cu timpul, $v = at$; care este legea

mișcării? $s = f(t)$ și ni se dă că $\frac{ds}{dt} = at$. Se deduce de aici că $s = \frac{1}{2}at^2 + k$, unde k este o constantă oarecare (pentru a o determina ar trebui să ni se dea și valoarea lui s pentru un anumit t).

Aflarea ariei și volumului fără calcul integral

Aria mărginită de parabolă (fig. 37). Împărțim intervalul Oa în n părți egale. Aproximăm aria a_i a trapezului curbiliniu prin cele două dreptunghiuri avînd baza $\frac{a}{n}$ și înălțimea $\left(i\frac{a}{n}\right)^2$, respectiv $\left[(i+1)\frac{a}{n}\right]^2$.

$$i^2 \cdot \frac{a^3}{n^3} < a_i < (i+1)^2 \cdot \frac{a^3}{n^3}.$$

Dînd lui i valorile $0, 1, \ldots, n-1$ și însumînd, avem:
$\frac{a^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] < A < \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$

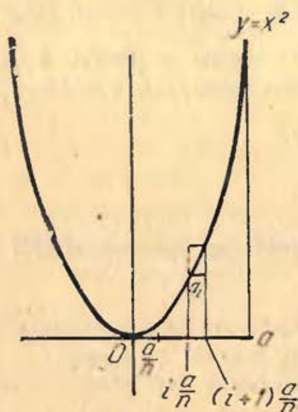


Fig. 37

Însă $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Deci:

$$A' = a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) < A < a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = A''$$

A'' este o valoare aproximativă prin adaos, iar A' una prin lipsă a ariei A. Avem $A'' - A' = \frac{1}{n}a^3$.

Cînd n este foarte mare, această diferență este foarte mică, de exemplu pentru $n = 100$, $A'' - A' = \frac{1}{100}a^3$. Dînd deci lui n valoarea 100 și luînd pentru A valoarea A' sau A'' avem valori aproximative cu o eroare mai mică decît a suta parte din a^3. Cu cît vrem valori mai apropiate, cu atît vom lua pe n mai mare. Făcînd pe n să tindă la infinit, fracțiile $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{6n^2}$ tind la 0; A' tinde (crescînd), iar A'' tinde (descrescînd) la A. Avem deci $A = \frac{1}{3}a^3$. Acest număr nu depinde de n și reprezintă în mod exact aria căutată.

Volumul paraboloidului (fig. 38). Să împărțim „înălțimea" $h = a^2$ a paraboloidului în n părți egale (numerotate pe

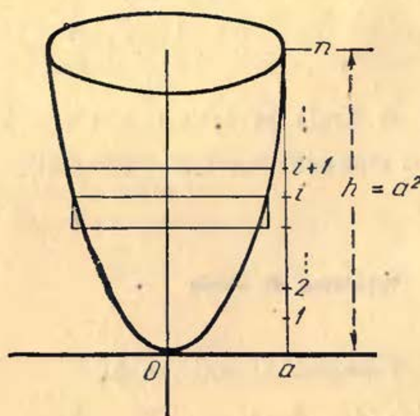


Fig. 38

figură). Ducem prin punctele de diviziune plane orizontale care taie paraboloidul după cercuri. Considerăm cilindrul care are ca bază de sus secțiunea prin i și înălțimea $\frac{h}{n}$. Pentru $i = 1, 2, \dots n$, obținem n cilindri care împreună depășesc volumul V. Dacă însă luăm secțiunea prin i ca bază de jos a cilindrului, cilindrul *intră* în volumul V. Excluzînd cilindrul cu baza în n (ultimul de sus) care construit în sus iese din volum, obținem $n - 1$ cilindri situați în interiorul lui V. Secțiunea prin i are raza $r_i = \sqrt{i\frac{a^2}{n}}$ (conform ecuației parabolei, $y = x^2$, înălțimea lui i este r_i^2). Cilindrul respectiv are volumul $V_i = \pi r_i^2 \cdot \frac{a^2}{n} = \pi i \cdot \frac{a^4}{n^2}$.

Avem:

$$V' = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} < V < V_1 + V_2 + \dots + V_n = V''$$

$$V'' = \pi \cdot \frac{a^4}{n^2}(1 + 2 + \dots + n) = \pi a^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right);$$

$$V' = \pi a^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{1}{2}\pi a^4 - \frac{1}{2n}\pi a^4 < V < \frac{1}{2}\pi a^4 + \frac{1}{2n}\pi a^4.$$

Făcînd pe n să tindă la infinit, obținem $V = \frac{1}{2}\pi a^4$. (rezultat obținut mai sus prin calcul integral).

Noțiunea de serie

Exemplul cel mai simplu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

Semnul ..., pus după ultimul +, naşte, desigur, nedumeriri. Adică să continuăm a serie încă şi alţi termeni? Pînă cînd? Nu există un *ultim* termen; altfel spus, „suma" de mai sus are „o infinitate" de termeni. Din nou, nedumeriri: ştiu ce înseamnă o sumă de *mai mulţi* termeni; pot fi 1 000 sau 1 milion de termeni, numai să fie în număr finit.

Ce poate însemna o sumă cu o infinitate de termeni? În adevăr, nu ştim ce înseamnă asta. Dar în loc să facem „teorie" şi să dăm „definiţii" noi, să ne apucăm să calculăm fără să ne descurajăm de la început de faptul că vom avea mereu de adunat încă unul, apoi încă unul etc. Ca să urmărim mai uşor sumele parţiale, să le reprezentăm pe axa numerelor (fig. 39). Cititorul să-şi facă figura singur ca să vadă treptat sumele.

Să privim mereu şi punctul 2. Cînd am ajuns cu suma la $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, trebuie să adunăm $\frac{1}{4}$, adică jumătate din distanţa $\frac{3}{2}-2$; ajungem în S_3. Acum adunăm $\frac{1}{8}$, adică jumătate din distanţa pînă la 2 *şi aşa mai departe*. Evident, nu putem trece niciodată de 2. Dar ne apropiem *oricît de mult* de el, căci distanţa de la S_n la 2 este $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Abia acum ajungem la o definiţie. Expresia cu o infinitate de termeni $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ legaţi prin semnul +, se numeşte *serie*. Pentru a face suma seriei, considerăm sumele parţiale S_1, S_2, ..., S_n şi vedem ce se întîmplă cu S_n cînd n creşte la infinit.

Dacă seria este cu termeni pozitivi, şirul S_1, S_2, ..., S_n ...(S) este crescător.

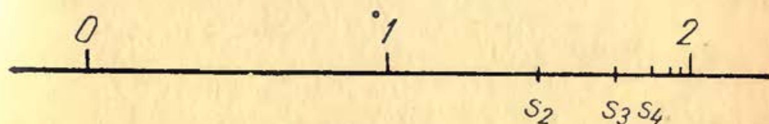


Fig. 39

Sau crește ajungînd la valori oricît de mari; spunem că seria este divergentă, suma ei este infinită.

Sau șirul (S) este *mărginit superior*, există un număr M astfel încît pentru orice n, $S_n < M$ (în exemplul de mai sus, $M = 2$) În acest caz, S_n crește apropiindu-se necontenit de un număr S ($S \leqslant M$), seria se numește convergentă iar S este suma ei.

În general, pentru orice serie (nu neapărat cu termeni pozitivi), dacă există un număr S, astfel că $S - S_n$ tinde la zero, seria este convergentă și are suma S. În caz contrar, ea este divergentă.

Dacă termenii unui șir $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ iau valori din ce în ce mai apropiate de zero, putînd lua valori oricît vrem de apropiate, spunem că șirul tinde la zero sau are limita zero. (Nu dăm aici definiția generală a expresiei limita $t_n = 0$.) Exemple:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \quad \frac{1}{n}, \ldots$ 2) $\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{5}, \ldots$

3) $\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots$ 4) $-\frac{3}{10}, \quad -\frac{3}{10^2}, \quad -\frac{3}{10^3} \ldots$

În exemplele 1 și 3, t_n se apropie de 0 descrescînd, în exemplul 4 crescînd, în 2 alternînd.

Fie seria geometrică:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$$

Dacă însumăm n termeni ai ei, obținem:

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

ceea ce se verifică printr-o simplă înmulțire

$$(r - 1)(1 + r + \ldots + r^{n-1}).$$

Mai putem scrie:

$$S_n = \frac{1}{1 - r} - \frac{1}{1 - r} \cdot r^n \text{ sau } S_n = \frac{1}{r - 1} r^n - \frac{1}{r - 1}$$

Dacă $|r| < 1$ (de ex. $r = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{10}$ etc.), termenul $\frac{1}{1-r} \cdot r^n$ are limita zero, S_n este egal cu numărul fix $\frac{1}{1-r}$ din care se scade o cantitate din ce în ce mai mică tinzînd la zero. Deci suma seriei geometrice este în acest caz $\frac{1}{1-r}$ (de ex. pentru $r = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$).

Dacă $|r| > 1$ — se poate vedea că seria este divergentă.

Alte exemple. 1. Seria:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Avem $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, deci

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$1 - S_n = \frac{1}{n+1}$ tinde descrescînd la zero; deci S_n tinde crescînd la 1. Seria este convergentă și are suma $S = 1$.

2. Seria:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

Termenii ei sînt respectiv mai mici decît ai primei serii: $\left(\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} \ldots \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}\right)$. Deci,

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Şirul S_n este crescător căci termenii seriei sînt pozitivi; este mărginit superior de numărul 1 (ceea ce nu înseamnă că „se apropie" de 1).

Deci seria este convergentă şi are suma *mai mică* decît 1 — fără să putem preciza cît anume.

În general dacă o serie are termeni pozitivi respectiv mai mici decît ai altei serii convergente cu suma S, este şi ea convergentă şi are suma mai mică decît S.

3. Seria

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Grupăm termenii astfel

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\right)+\left(\qquad\right)+\ldots$$

Fiecare paranteză este mai mare ca $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+$$
$$+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\ \text{etc.}$$

Deci S_n, cu n suficient de mare, $>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $+\ \ldots$ putînd lua oricîţi de $\frac{1}{2}$ vrem. S_n poate deveni mai mare ca orice număr, spunem că tinde la infinit, seria este divergentă.

Acest exemplu este important; el ne arată că se poate ca termenii seriei să fie din ce în ce mai mici, tinzînd la zero, şi totuşi S_n să crească tinzînd la infinit. Termenii descresc, dar nu „destul de repede" pentru a asigura convergenţa

seriei. Pe cînd la seria geometrică cu $r < 1$, ei descresc destul de repede ca seria să fie convergentă: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ fiecare termen este jumătate din precedentul; $\frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \frac{1}{102}$ etc. $\frac{1}{101} < \frac{1}{100}$ dar „cu puţin" mai mic căci $\frac{1}{100} - \frac{1}{101} < \frac{1}{10\,000}$.

4. Seria alternată $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$ în care termenii descresc în modul şi $\lim u_n = 0$ este convergentă, ceea ce se vede pe figura 40.

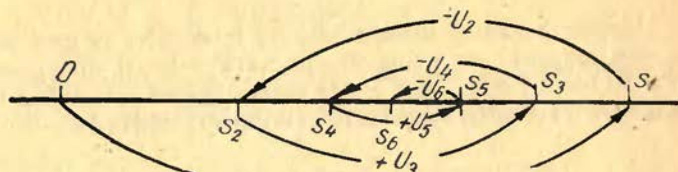


Fig. 40

Vedem pe aceeaşi figură că pentru k impar, $S_k > S$ şi $S_k - S < u_{k+1}$, pentru k par $S_k < S$ şi $S - S_k < u_{k+1}$

Serii în care termenii sînt funcţii de x. Fie seria

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Pentru fiecare valoare a lui x avem o altă serie.

Dacă luăm numai valorile lui x pentru care seria este convergentă, suma seriei S va fi tot o funcţie de x, $S(x)$.

În exemplul nostru, este vorba de o serie geometrică cu raţia x. Dacă $-1 < x < 1$, avem:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

Spunem că avem funcţia $S(x) = \frac{1}{1-x}$ scrisă ca serie de puteri ale lui x.

Seria:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

este tot o serie geometrică cu rația $-x$. Deci avem pentru $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Seria:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

este tot geometrică cu rația $-x^2$. Deci pentru $|x| < 1$, avem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Se demonstrează că dacă x este în intervalul în care seria este convergentă, ea poate fi derivată termen cu termen, adică derivata sumei $S(x)$ va fi seria obținută derivînd termenii. De exemplu, derivînd formula (1) obținem

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

egalitate valabilă pentru $|x| < 1$.

Aplicație: calculul lui π

Avem
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad (1)$$

Ținînd seama că $\frac{1}{1+x^2}$ este derivata funcției arc tg x, obținem:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (|x| < 1) \qquad (2)$$

căci derivînd termen cu termen, obținem (1), în plus, pentru $x = 0$, egalitatea se verifică.

Avem și

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\text{căci luînd tangenta în ambii membri obținem } \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1\right)$$

Înlocuind în (2) pe x prin $\frac{1}{2}$ și prin $\frac{1}{3}$, obținem

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{128}+\dots$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{243}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2\,187}+\dots$$

Avem deci

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{243}\right)-$$
$$-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{128}+\frac{1}{2\,187}\right)+\dots$$

S_3 reprezintă o valoare prin adaos iar S_4 prin lipsă, a lui $\frac{\pi}{4}$. Calculînd pe S_3 și S_4, obținem valoarea lui π cu două zecimale exacte.

Există și alte moduri de a obține numărul $\frac{\pi}{4}$. De exemplu, Machin (1706) folosește expresia

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

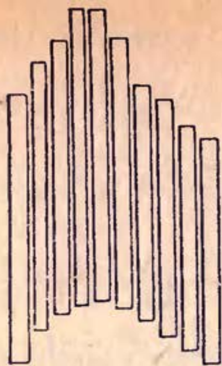
și cu ajutorul ei calculează π cu 100 de zecimale (verificarea relației constituie un exercițiu de trigonometrie pentru cititor).

În 1755, Euler dă o serie care îi permite să calculeze într-o oră 20 de zecimale ale lui π. Calcule mai rapide decît în vechea metodă a lui Arhimede!

IDEI PREGĂTITOARE

Metoda indivizibililor

Să ne închipuim o porțiune de plan acoperită de bețișoare subțiri alăturate (fig. 41). Dacă le deplasăm — menținînd numărul și dimensiunile lor — obținem o suprafață de altă formă, însă cu aceeași arie.



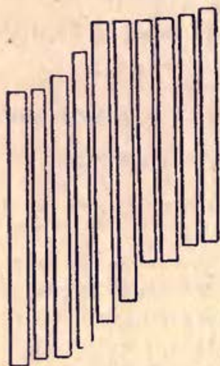


Fig. 41

Principiu. Dacă fiecare dreaptă a unui fascicul de drepte paralele taie două suprafețe după segmente egale, ariile sînt egale. Mai general: dacă cele două segmente sînt mereu în același raport k, și raportul ariilor va fi același.

Să ne închipuim un volum — de pildă o piramidă — format din foi subțiri suprapuse. Dacă le deplasăm, obținem un corp cu altă formă însă cu același volum.

Principiu. Dacă fiecare plan al unui fascicul de plane paralele taie două corpuri după suprafețe de aceeași arie,

cele două corpuri au acelaşi volum. Mai general, dacă cele două arii sînt în acelaşi raport k, raportul volumelor va fi acelaşi. Exemplu. Să deplasăm vîrful unei piramide într-un plan paralel cu baza, menţinînd aceeaşi bază. Obţinem două piramide cu aceeaşi bază şi cu înălţimi egale. Tăindu-le cu un plan paralel cu baza, secţiunile au aceeaşi arie (pe baza teoremei $\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$, unde s este aria secţiunii, h distanţa de la vîrf la ea, iar S, H aria bazei şi înălţimea piramidei). În baza principiului enunţat, cele două piramide au acelaşi volum.

Interesant e faptul că deşi raţionamentele sînt mai mult *fizice* decît geometrice, rezultatele sînt juste. Cele două „principii" enunţate sînt în fond teoreme care pot fi demonstrate riguros.

Concepţia care stă la baza acestor raţionamente a avut-o întîi filozoful materialist Democrit. Aşa cum am menţionat în capitolul respectiv, Arhimede însuşi a observat şi justeţea unor rezultate găsite de Democrit, dar şi lipsa lor de rigoare. El a folosit o metodă riguroasă numită metoda exhaustiunii (esenţa ei am arătat-o mai sus la pag. 182); dar a apreciat şi importanţa raţionamentelor fizice pentru descoperirea rezultatului, după care demonstraţia propriu-zisă devine mai uşoară.

Să arătăm că principiile sînt juste. Pe baza calculului integral, demonstraţia este imediată. Pentru figura 42, ea se reduce la relaţia

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

relaţie care se arată în prima lecţie de calcul integral.

Dar şi prin metoda exhaustiunii, demonstraţia este destul de simplă. Cele două dreptunghiuri care aproximează prin lipsă şi prin adaos o fîşie dintr-o arie, sînt egale cu cele respective de la a doua arie. La fel, vor fi egale şi sumele S_1, S_2 care aproximează cele două arii. Avem $S_1 < A < S_2$, $S_1 < A' < S_2$; diferenţa $S_2 - S_1$ poate fi făcută oricît de mică căci $S_2 - S_1 < (l_2 - l_1)\ (b_1 + b_2 + \ldots)$, unde $l_2 - l_1$

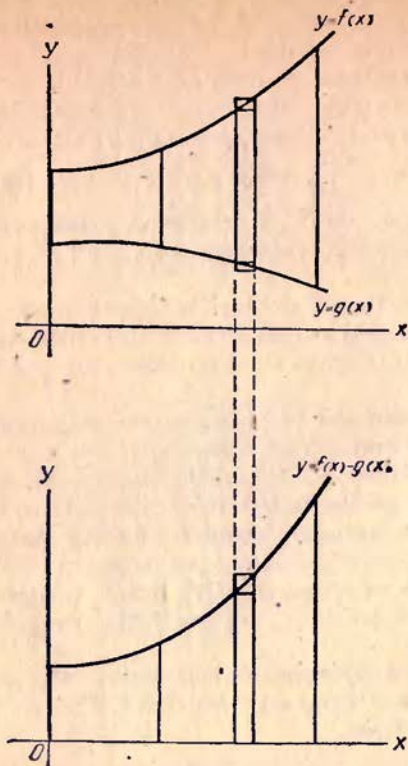


Fig. 42

este cea mai mare dintre diferențele înălțimilor (în figură la ultimele) iar $b_1 + b_2 + \ldots$, suma bazelor $= B$, aceeași la cele două arii iar $l_2 - l_1$ tinde la zero (funcția fiind presupusă continuă).

Demonstrație analogă pentru al doilea principiu (vom aproxima volumele prin paralelipipede sau cilindri).

Nu știu de ce în jurul lui 1600, o dată cu renașterea matematicii, se acordă mai mult interes metodei indivizibilelor,

decît aceleia — mai riguroase — folosite de Arhimede. Cert este că o astfel de metodă neriguroasă a avut, istoric, un rol pozitiv. Kepler — despre care vom vorbi în capitolul următor — a folosit-o cu succes pentru a determina... volumul butoaielor. În 1635 apare cartea *Geometria dezvoltată într-un mod nou cu ajutorul părților indivizibile ale mărimilor continue* (după cum se vede, cei vechi nu evitau titlurile lungi!), scrisă de un discipol al lui Galileu, *B. Cavalieri* (1598—1647), și în care reprezentarea fizică naivă este transformată într-o concepție mai apropiată de specificul geometriei.

Cu titlu de curiozitate, să arătăm relația $\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$, imediată în Analiza actuală, demonstrată prin „exhaustiune" mai sus (pag. 183), într-un al treilea mod, cam în felul în care îi apare lui Cavalieri.

Suma volumelor „patratelor" din figura 43 (presupuse cu laturile lipite) poate fi interpretată în două moduri: 1) dacă notăm „lățimea" unuia cu Δx, avem $\sum x^2 \cdot \Delta x$, adică (la limită) integrala din membrul I; 2) dacă punem patratele unul peste altul, obținem o piramidă avînd ca bază patratul mare cu latura a și înălțimea a, deci cu volumul $\frac{1}{3} a^3$, membrul II al relației.

Justețea rezultatului o înțelegem mai bine azi. Cînd vrem să aflăm volumul piramidei prin calcul integral sau prin exhaustiune, formăm paralelipipede subțiri cu înălțimea Δx și sîntem conduși tot la o sumă de forma $\sum x^2 \cdot \Delta x$.

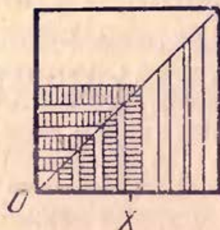


Fig. 43

Fermat, rafinînd metoda, găsește rezultate și mai generale pe care le-am exprima azi, simplu

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

Pentru arie, Cavalieri folosește expresia *totalitatea* segmentelor de dreaptă care o acoperă (expresie pe care o întîlnim și la Kepler în formularea legii ariilor), pentru volum, totalitatea „plăcilor" care îl formează.

Numai pentru că nu folosește această „totalitate" ca măsură directă, ci prin intermediul unor rapoarte — raportul a două mărimi (arii, volume) este egal cu raportul între totalitățile de indivizibile corespunzătoare — rezultatele lui Cavalieri sînt juste. Abia Pascal aduce o schimbare de concepție: nu totalități de indivizibile, ci *sume* aritmetice în care termenii sînt de aceeași natură ca și rezultatul (o arie = o sumă de arii, un volum o sumă de volume). Sumele $\sum n^2$, $\sum n^3$ etc., nu erau calculate de Pascal numai din curiozitate aritmetică, ci pentru că ele servesc efectiv în calcule de arii și volume (v. pag. 183). Prin aceasta, Pascal se apropie mai mult decît Cavalieri de *esența* calculului integral — fără a ajunge însă și la notații și teoreme *generale* care fac și ușurința și eficacitatea metodelor acestei discipline, pe atunci încă în germene.

Încă din etapa premergătoare, ideea de integrală este legată nu numai de calcul de arii și volume, ci și de probleme de mișcare. Astfel din relația $v = gt$, Galileu, într-o lucrare din 1638, deduce legea spațiului în cădere liberă $s = \frac{1}{2} gt^2$ — deci în fond o problemă inversă derivării — folosind un mod de a gîndi apropiat de al lui Cavalieri și, fără a se desprinde de reprezentări geometrice, își formulează rezultatul: s este egal cu *aria* triunghiului avînd o catetă t și cealaltă viteza finală, gt.

Dacă am cita și alți autori, fiecare cu unele reușite parțiale și situați pe diferite trepte de maturizare a ideii centrale, ar fi și mai puternică impresia care se degajă totuși și din

sumarele referințe de mai sus: cîte peripeții, cîte eforturi de gîndire, dăruite cu entuziasm și cu perseverență, cîte aproximații succesive pînă a se ajunge la adevărul curat care încape astăzi în 2—3 pagini de manual!

Ideea de derivată

Aceleași aproximații succesive, fiecare cucerită cu eforturi speciale, și în cristalizarea celeilalte idei de bază a analizei, derivata.

Întîi probleme de maxim. Atît Kepler, cît și Fermat își dau seama că în vecinătatea punctului de maxim, funcția nu variază prea mult, ia valori quasi egale. Iată, de pildă, cum ar fi tratat Fermat problema de maxim de mai sus, maximumul funcției $a^2x - x^3$. Fie m punctul de maxim. Pentru $x = m + e$, vom avea o valoare aproape egală

$$a^2m - m^3 = a^2(m + e) - (m + e)^3$$

Reducînd termenii asemenea și împărțind peste tot cu e

$$a^2 - 3m^2 - 3me - e^2 = 0$$

Dar egalitatea scrisă este aproximativă, cu atît mai aproape de adevăr cu cît e este mai mic. Făcînd pe e zero, obținem

$$a^2 - 3m^2 = 0; \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}\, a.$$

Să facem acum derivata funcției în punctul m. Avem

$$\frac{f(m+e) - f(m)}{e} = a^2 - 3m^2 - 3me - e^2$$

deci $f'(m) = \lim\limits_{e \to 0} \dfrac{f(m+e) - f(m)}{e} = a^2 - 3m^2$

Deci noi facem *exact* aceleași calcule ca și Fermat, numai ideile care conduc acest calcul sînt mai clare, mai precise.

Pascal reprezintă, am zice, o aproximație, în plus, pentru că se ocupă de derivata în sine și nu numai de puncte de maxim. El concepe un arc foarte mic al curbei ca fiind „confundat" fie cu coarda respectivă, fie cu un segment foarte mic al tangentei. Acest mod de a gîndi conduce la rezultate exacte. În Analiza propriu-zisă, numai demonstrația este mai riguroasă, folosind expresia $\lim \frac{\text{coardă}}{\text{arc}} = 1$.

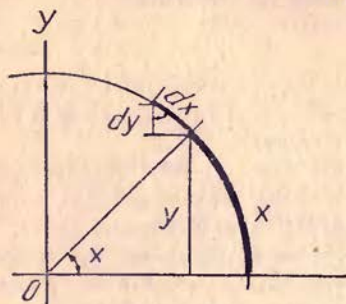


Fig. 44

Iată, ca exemplu, cum s-ar stabili prin punctul de vedere Pascal, derivata funcției sin x. În triunghiul „infinit mic" (fig. 44), ipotenuza dx este arcul cu care a crescut x, dar e și un mic segment al tangentei. Deci unghiul între dx și axa Oy este x — unghiuri cu laturi perpendiculare; notînd cu dy cateta care arată creșterea lui sin x, avem prin definiția cosinusului $\frac{dy}{dx} = \cos x$; derivata lui sin x este cos x.

Raționamentul nu este riguros dar rezultatul este exact. În general, rigoarea expunerii introduce lungirea textului, avînd ca revers de ordin psihologic, pierderea din atenție a ideii principale. De aceea, și azi, fizicienii folosesc în aplicarea analizei la probleme reale, imagini și raționamente de genul celui de mai sus; ei asimilează un arc mic cu diferențiala lui, ds, „văd" notația dx dy de la integrala dublă ca un „dreptunghi" de dimensiuni dx, dy, analog la cea triplă. De pildă, pentru a studia un gaz, împart volumul lui în

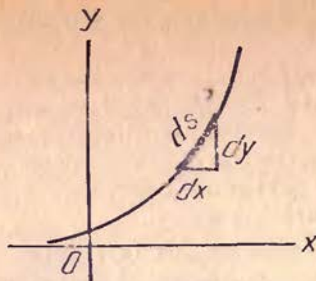


Fig. 45

paralelipipede cu dimensiunile dx, dy, dz, destul de mici ca să poată aplica formule din analiză dar şi *destul de mari* ca un astfel de paralelipiped să conţină *gaz* şi nu o singură moleculă sau un fragment de moleculă.

Anumite imagini şi raţionamente simplificate care au fost folosite de precursorii sau de creatorii analizei îşi păstrează şi astăzi o valoare euristică.

Leibniz, unul din creatorii analizei, citind *Tratatul despre sinusuri* al lui Pascal, atenţia i-a fost atrasă de triunghiul dx, dy, ds (fig. 45) — pe care el l-a numit „triunghiul caracteristic" — şi, după propria-i mărturisire, a zărit aici o lumină pe care autorul figurii nu o văzuse. Reflecţiile făcute, pornind de la această împrejurare sînt, cel puţin în parte, la originea invenţiei calculului diferenţial.

Două probleme separate se intîlnesc

Problema aflării ariilor şi volumelor, problema aflării tangentei la o curbă împreună cu aflarea punctelor de maxim, au constituit pentru precursori două probleme separate, mai bine zis două *genuri* de probleme. Nu s- însumaseră toate problemele de acelaşi gen într-o problemă

generală și nici nu fusese surprinsă *legătura* între cele două genuri.

Am mai spus cu alt prilej, că una din caracteristicile importante ale activității matematice este surprinderea *legăturii* între lucruri care păreau independente, — fenomen care are și o mare valoare estetică în sine precum și o mare valoare logică și euristică, prin clarificarea ideilor și prin deschiderea unor noi orizonturi cercetării.

Legătura între problema „de integrare" și aceea „de diferențiere" a fost întrevăzută pentru prima oară de către Isaac Barrow, profesorul lui Newton, în lucrarea sa *Lecții de optică și geometrie*. El s-a ocupat cu cele două probleme de bază ale mișcării — cunoscînd legea spațiului, să se deducă viteza; cunoscînd viteza, să se afle spațiul; le-a tratat prin metode geometrice (sugerate de lucrările anterioare ale lui Wallis și Fermat): important e că a doua problemă, problema *inversă* a tangentelor, a rezolvat-o printr-o cvadratură, deci prin calcul integral.

NEWTON ISAAC (1642–1727)

Descartes — reflecții filozofice *concordante* cu principala sa operă matematică, *perturbatoare* pentru teoria sa fizică asupra lumii

Fermat — matematician, complet *disjunct* față de filozofie

Pascal — atracția pentru filozofie mistică și religie de sens contrar cu atracția pentru fizică și matematică

Newton, un erudit teolog — ați știut? —, cel mai mare om de știință, nu numai din secolul în care a trăit (aceasta, desigur, ați știut), un filozof al științei — de vreme ce principala sa operă *științifică* este intitulată *Principiile filozofiei naturale*. Care este relația între aceste trei ipostaze coexistente în același om?

Planul teologic este complet neutru, nu intră în nici un fel de reacţie cu planul ştiinţei şi al filozofiei despre ea; nu-i influenţează în nici un fel conţinutul dar — din cauza uriaşei puteri de muncă a lui Newton — nu influenţează sensibil nici *întinderea* preocupărilor ştiinţifice.

Pascal: preocupările religioase îl răpesc în anumite perioade preocupărilor ştiinţifice.

La Newton teologia nu consumă, am zice, din energia sa psihică cheltuită pentru ştiinţă. Nu mai putem spune că ne-teolog Newton ar fi dat ştiinţei mai mult — e oare posibil mai mult decît a dat efectiv? Orice om are nevoie de o variaţie, de alternări de planuri; un om poate fi în principal matematician şi, din cînd în cînd, alpinist sau amator de romane, de muzică etc. Nu ştim cît de profundă, cît de răscolitoare era pasiunea teologică a lui Newton. S-ar părea că este mai atras de istoria creştină şi de *interpretarea* textelor biblice, de vreme ce nu aduce în acest domeniu nimic prea original, care să poarte amprenta geniului său. Fără a intenţiona să facem o impietate, putem califica preocupările sale teologice ca a-ştiinţă şi să le alăturăm abstracţie făcînd de conţinut, unei a-ştiinţe, de orice altă natură, alpinism, romane, muzică.

Cu totul altul este raportul între celelalte două ipostaze, acelea care caracterizează esenţial noţiunea istorică numită Newton: filozof, om de ştiinţă. Aici există nu numai concordanţă între planuri distincte, există o *unitate organică*, concepţia lui filozofică este baza, activă şi esenţială, a sistemului său ştiinţific. Am fi tentaţi să scriem o proporţie: raportul între filozofia lui Descartes şi opera sa matematică este de aceeaşi natură cu raportul între concepţia filozofică a lui Newton şi *fizica* sa — pentru a marca înrudirile strînse. Nu o scriem pentru că, la Newton, unitatea între filozofie şi fizică este mai profundă. Matematica lui Descartes este *un exemplu de aplicare* a metodei; este deci oarecum exterioară filozofiei sale, e o anexă, care ar fi putut apare şi fără această filozofie. Fizica lui Newton nu ar fi fost posibilă fără un punct de vedere just asupra fundamentelor ei filozofice; aici nu există distincţie între filozofie şi ştiinţă,

filozofia este *încorporată* fizicii și anume în partea ei de la bază, în enunțarea principiilor mecanicii.

Importanța filozofiei lui Newton, eficacitatea ei în știință constau în *modestia* cerințelor față de ea. Să separăm știința în primul rînd de religie. Să nu ne întrebăm „cum a făcut Dumnezeu" lumea; să constatăm și să judecăm pentru a găsi cum este lumea, care sînt legăturile cauzale între fenomene. Să separăm știința și de o filozofie prea pretențioasă, care ar ținti la cunoașterea cauzelor ultime, a esenței esențelor; plec de la ce știu și în primul rînd știu ceea ce văd cu ochii; caut substratul imediat a ceea ce știu și nu un imaginar cel mai adînc substrat. Văd că planetele se mișcă după elipse. E din cauză că acționează asupra lor o forță de atracție din partea soarelui. Important în acest stadiu este să găsesc cît de mare este această forță și care este efectul unei forțe asupra mișcării. Ce înseamnă forță? Cum și cine o produce? De ce lucrează așa și nu altfel? — sînt întrebări neactuale. A găsi legi explicative nu înseamnă a explica dintr-o dată totul. Înseamnă a descoperi într-o clasă de fenomene cu aspecte deosebite, un fenomen unitar, manifestat, din punct de vedere concret, în diverse moduri. Ceea ce este foarte mult pentru știință, deși prea puțin față de o filozofie speculativă care, tocmai pentru că cere prea mult, nu obține nimic. Acesta e înțelesul vestitei afirmații a lui Newton „nu fac ipoteze".

Newton s-a născut și a trăit în Anglia sună prima propoziție din biografia sa. Un simplu fapt istoric; merită să ne oprim asupra lui? Sînt fapte istorice pur întîmplătoare — de pildă că Newton s-a născut în satul Woolsthorpe sau că s-a născut prematur și era, la naștere, un copilaș debil; ar fi fost posibil să se nască în orașul apropiat Grantham și după ce l-a născut, mama lui să se stabilească în satul citat — fără ca aceasta să afecteze cariera lui științifică.

Faptul că a trăit în Anglia este însă semnificativ. Concepția filozofică asupra științei pe care a avut-o Newton a găsit un climat favorabil în mediul englez. Astăzi, datorită contactului strîns între oamenii de știință de pe tot globul, știința nu este legată de caractere naționale sau, cel puțin, legătura este foarte estompată. În secolul 17 însă, nu numai literatura

— ceea ce este mult mai natural — ci şi ştiinţa are un caracter naţional, desigur nu atît de pronunţat ca literatura. Limitîndu-ne la aspecte dominante, caracteristice, vorbim despre *pragmatismul* englez, despre *raţionalismul* francez, despre o anumită mistică nebuloasă în filozofia germană (sau într-o parte însemnată a ei). Există pentru fiecare din aceste concepţii reprezentanţi de frunte, cărora greşit li s-ar atribui *crearea* acestor concepţii. Ei nu fac decît *să exprime* într-o formă sistematizată *mentalitatea* mediului în care trăiesc şi, prin prestigiul lor, să influenţeze *întărind-o*, nu schimbînd-o, mentalitatea care i-a influenţat. Nu pentru că l-au avut pe Descartes sînt francezii raţionalişti, ci pentru că sînt raţionalişti l-au dat pe Descartes care le-a accentuat acest caracter. *Fr. Bacon* (1561—1626), apologetul metodei experimentale, este englez. Dar nu prin el sau prin Newton, devin englezii pragmatici, ci, prin ei, se adaptează filozofiei şi ştiinţei un mod de a vedea specific acestui popor. Englezii sînt recunoscuţi ca oameni *practici*, cu simţul realităţilor de fapt, de unde pînă şi astăzi un anumit conservatorism, care îi face să prefere situaţii îndelung verificate în viaţă, şi să întîmpine cu o exagerată prudenţă schimbări, oricît de „raţionale" ar părea ele. Ei nu se pierd în teorii nebuloase şi gratuite; teoria este pentru ei un mod de a face mai bine; ea se ridică deasupra faptelor numai atît cît e necesar, pentru a le cuprinde mai bine, cu grija de a nu pierde legătura cu ele, de a nu aluneca în teorii pure, oricît ar fi acestea de frumoase în abstracţiunea şi dezinteresul lor.

De ce sînt englezii aşa, care sînt împrejurările geografice şi istorice sau legile biologice prin care anumite popoare prind caractere naţionale specifice — sînt probleme prea complexe, care ne-ar împinge la „teorii" prea îndepărtate de faptul pe care l-am avut în faţă. Cele cîteva consideraţii intercalate nu au decît rolul de a ne face să înţelegem mai bine această propoziţie simplă: Newton este englez.

Dar ele aduc de la sine o remarcă suplimentară.

Newton este englez prin naştere şi printr-o anumită concepţie de viaţă sau filozofică. Prin opera sa el este universal,

un reprezentant strălucit al geniului uman. După cum nici Descartes nu mai este azi al francezilor, ci al umanității. Și asupra acestei afirmații trebuie să ne oprim puțin.

Citind pe Descartes, devenim cartezieni; citind pe Newton, cădem în admirația lui. Citindu-i pe ambii, se ridică întrebarea: cum e mai bine? Bine nu e *să optezi*, ci să sintetizezi. Admirația nu trebuie să creeze modele, ci sugestii. Newton fără Descartes sau fără Euclid nu e posibil. Fiecare din ei e o altă față a spiritului uman, fiecare o altă antenă a curiozității științifice, care e caracterul comun pentru întreaga specie umană. Popoarele „bătrîne" au dat creații pe linia a ceea ce a fost specific geniului fiecăruia. Popoarele tinere — analog cu indivizii tineri — au ca specific prospețimea, entuziasmul, capacitatea de a înțelege peisagiul divers al culturii trecutului și pe aceea de a păși cu forțe noi spre sintezele superioare ale viitorului.



Nu și-a cunoscut tatăl (mort înainte de nașterea lui). Cînd Newton avea 3 ani, mama sa s-a recăsătorit cu un preot, copilul rămînînd la bunica lui. Fratele mamei sale era, de asemenea, preot. Aceste două persoane vor fi exercitat o influență pe linia preocupărilor lui teologice.

La 12 ani, Newton intră la școala medie din orășelul Grantham, fiind găzduit la farmacistul Clark. Se poate ca această împrejurare să fi influențat atracția lui Newton pentru preocupări de chimie — și de alchimie — domenii în care nu a adus rezultate noi, deși i-au consumat eforturi mari.

Se remarcă drept un elev inteligent și sîrguincios. În timpul liber, în loc de jocurile cu colegii, preferă jocuri de alt tip: construiește jucării, ceasornice de apă sau de soare, zmee, culege ierburi de leac, desenează, își întocmește un dicționar, în care își grupează pe categorii — meșteșuguri, boli, ierburi, sentimente umane etc. — cunoștințele. Dorind să afle viteza unui vînt puternic, sare în direcția vîntului, apoi împotriva lui și măsoară diferența.

În 1661, la 17 ani, Newton intră la Trinity College din Cambridge — o universitate renumită a Angliei.

A studiat aici pe Euclid, trigonometria, teologia și limbile vechi, astronomia.

Între 1665 și 1667, din cauza unei epidemii de ciumă, se refugiază în satul în care s-a născut, unde continuă o muncă științifică intensă, de astă dată axată pe cercetări proprii. Din această perioadă datează ideile de bază ale principalelor sale opere, crearea analizei matematice și mecanicii, cercetările de optică.

În 1669, profesorul său I. Barrow, cedează catedra sa elevului preferat, Newton. S-a înscăunat tradiția ca această catedră să constituie o onoare deosebită; de pildă printre titularii ei recenți se află P. Dirac, celebru în mecanica cuantică. Newton îl ajută pe Barrow la editarea Cursului de optică și geometrie.

Salariul este suficient pentru a-i asigura o viață fără griji materiale.

În 1672, Newton face comunicarea cu titlul *Noua teorie a luminii și a culorilor*, în care apare concepția sa filozofică: de la experiență la principii și de aici la o construcție în stil Euclid — concepție care se va traduce perfect în fapt, în mecanică.

Cercetările de optică l-au absorbit. Revine la mecanică abia prin 1679 — un rol în această cotitură va fi avut și o scrisoare a lui Hooke, secretarul Societății regale, în care îi cerea părerea asupra unor ipoteze în legătură cu mișcarea planetelor. Urmează o perioadă de muncă intensă, consacrată atît Principiilor, cît și cercetărilor experimentale de chimie. Din memoriile secretarului său, rezultă că dormea 4—5 ore pe noapte; „nu călătorea, nu făcea plimbări, nu juca popice, nu făcea sport, orice oră care nu era consacrată lucrărilor el o considera pierdută. (...) uneori, uita să mănînce". Cercetările de chimie pentru care a cheltuit o muncă uriașă nu au rămas decît sub formă de ciorne și notițe personale; se pare că era preocupat și de vestita problemă a alchimiei — transformarea metalelor în aur — și că el însuși a ținut să păstreze secretul asupra lor.

În 1689 a fost ales membru al parlamentului din partea universității, fără a se remarca cu nimic în activitatea politică.

În 1696 i se propune postul principal la Monetărie cu un salariu bun și fără a i se cere ore de serviciu prea multe care să-l sustragă științei. Newton se mută la Londra. În 1699 devine director general al Monetăriei și renunță la catedra din Cambridge. În 1703 devine președintele Societății regale, funcție pe care o deține pînă la sfîrșitul vieții. În 1705 i se acordă titlul de noblețe.

Newton nu a fost înțeles — cursurile sale erau frecventate de foarte puțini studenți — dar a fost apreciat în mod deosebit, deci la justă valoare, în tot timpul vieții, și ca elev și student, și prin faptul că profesorul său îi cedează catedra, și ca membru al Societății regale, și prin distincțiile care i s-au acordat.

După moarte, aprecierea față de Newton a crescut la nivelul unei adevărate proslăviri. O gravură dintr-o lucrare din 1738 despre opera filozofică a lui Newton îl înfățișează ca pe un zeu cu compasul în mînă, tronînd pe un nor. Pe statuia care i se ridică în 1755 la Cambridge se află inscripția (din Lucrețiu): Qui genus humanum ingenio superavit (Prin inteligența sa depășea specia umană). Un poet (A. Pope), sub sugestia unui verset biblic (Dumnezeu a spus să fie lumină, și lumină se făcu) include într-o poezie versul: „puterea divină a spus: „să fie Newton. Și lumină se făcu". Hòpital, unul din entuziaștii popularizatori ai lui Newton, și-a manifestat o mare mirare cînd a aflat că Newton mănîncă, doarme la fel cu un om obișnuit.

Poate nici un alt om de știință nu a fost mai ridicat în slavă ca Newton.

Admirație pe deplin meritată. E bine însă să ne oprim puțin pentru a medita asupra *naturii* ei. Sînt două moduri de a admira distincte și prin cauza și prin timbrul și prin implicațiile acestui fenomen psihic. Un mod de a admira provine din neînțelegere, celălalt din înțelegere. Reducînd proporțiile, pentru a avea ceva mai familiar, să ne gîndim la admirația unuia dintre codașii clasei pentru premiantul de

la olimpiadele matematice. Privește problema dată la concurs ca o șaradă cu totul nebuloasă, își dă seama numai de faptul că el nu ar fi putut face așa ceva, admiră performanța în sine, fără să cunoască în ce constă ea în fond, o admiră datorită distanței față de posibilitățile lui proprii. Un elev din clasa a V-a se duce la un elev mai mare să-i facă problema, acesta i-o face prin algebră — cum nu-i trebuie lui — rămîne mut de admirație văzînd niște cabalistici x și y, care îi dau rezultatul exact; după 2—3 ani, cînd învață el însuși algebra, constată că nu e așa de greu pe cît părea, își *explică* succesul metodei algebrice și prin aceasta admirația lui față de această metodă *își schimbă natura*.

Același elev asistă la reprezentația unui scamator. Rămîne uimit — și desigur în admirație — de ce reușește el să facă. Află apoi secretul. Admirația lui scade, sau, mai bine zis, își schimbă natura; admiră acum abilitatea și nu faptul în sine de a stăpîni niște mistere.

Opera lui Newton nu este înțeleasă în fond de către mulți dintre contemporanii săi, în special de către comentatorii filozofi sau poeți. Se știe că e celebră, că e ceva „minunat", minune cu atît mai mare cu cît e mai inaccesibilă și mai străină. Tocmai din acest caracter de inaccesibil și străin, izvorăsc metafore de genul „Newton-zeu" sau „deasupra speciei om".

Sînt însă alți oameni — matematicienii — care se silesc să-i descifreze secretul, să-i învețe „algebra", să vadă *cum face* nu numai ce rezultate a obținut. Ei sînt atrași nu numai să-l înțeleagă, ci să-l continue, să-l perfecționeze, să afle noi rezultate pe linia deschisă. Dacă Newton are cîțiva precursori, are cu mult mai mulți succesori. Care îl admiră, fără îndoială. Dar în alt mod: nu așezîndu-l pe un nor, ci alăturîndu-i-se.

Omagiul cel mai potrivit unui mare creator nu este a-l ridica la înălțimi supraumane, ci invers, a ridica omul spre poziția sa, înaltă dar umană.

Proslăvirea platonică, poetică a omului își va fi avînd rolul ei. Un rol mai adînc are admirația bazată pe înțelegerea operei, pe rîvna de a o duce mai departe.

LEIBNIZ GOTTFRIED WILHELM
(1646—1716)

S-a născut la Leipzig; a studiat tot la Leipzig filozofia, teologia, dreptul. Se spune că încă de la vîrsta de 15 ani reflecta asupra lui Aristot și a lui Democrit, nehotărît la care din ei să adere. Nehotărîre plină de tîlc: își va construi un sistem filozofic propriu, original.

În 1673 face călătorii de studii în Anglia și la Paris, unde rămîne mai mult timp. În 1676 — deci la 30 de ani — devine directorul Bibliotecii ducale din Hanovra, funcție în care rămîne pînă la sfîrșitul vieții. Este totodată consilierul ducelui, jurisconsult și diplomat, obținînd și titlul de baron. Deci succese pe planul carierei sociale. Succese cu mult mai mari — a căror strălucire nu se va pierde nici cînd — în matematică; succese mari — pe care însă istoria le va revizui — și în filozofie. Probabil că în filozofie oamenii nu gîndesc numai cu capul — chiar cînd e vorba de un spirit atît de strălucit și dotat, cum e Leibniz — ci și prin prisma împrejurărilor personale. Una din lucrările lui filozofice, *Teodiceea*, are ca deviză: *Tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles* (Totul e cît se poate de bine în cea mai bună lume posibilă) — afirmație care, deși se referă mai mult la ordinea metafizică, va deveni pe drept mai ridiculizată pe măsură ce nedreptățile sociale se vor accentua...

Filozof ca formație, face cercetări matematice personale, încă de tînăr, fără să fie la curent cu ce „este cunoscut". La 20 de ani, publică *Dizertație despre arta combinatorie*, în care dă teoria combinărilor și permutărilor — subiect care se pretează la o abordare fără cunoștințe prealabile speciale. În continuare, se ocupă cu sume aritmetice, și găsește pe lîngă rezultate stabilite anterior de Pascal — pe care nu le cunoștea — și rezultate noi; suma *inverselor* combinărilor îl conduce la *serii* (despre cea mai simplă din ele $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ am vorbit la pag. 187), deci la o noțiune de bază a analizei.

Totuşi, el mărturiseşte că în 1673, cînd face prima călătorie în Anglia, cunoştinţele lui matematice erau destul de restrînse. Pentru un gînditor original şi profund cum era Leibniz şi care abordează probleme *noi*, această „lipsă" nu constituia un impediment; poate, dimpotrivă, ea îi va fi permis să nu meargă pe făgaşuri bătătorite, să nu fie dominat de o concepţie învechită asupra matematicii.

De la această dată începe şi să se informeze. Sub sugestia unei lucrări a lui Mercator, Leibniz stabileşte serii pentru aria sectorului circular, elipsei, iperbolei, dînd şi seria

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdots$$

Pentru a citi lucrarea *Orologiul cu pendul*, pe care i-o oferise autorul ei, Huygens, Leibniz studiază pe Descartes, Pascal ş.a. Am menţionat faptul că tocmai lectura lui Pascal îi sugerează noţiunea de „triunghi caracteristic", noţiune de bază a calculului său diferenţial.

În 1676 într-o scrisoare adresată lui Oldenburg — secretar al Societăţii regale din Londra — Leibniz îi comunică parte din descoperirile sale, cerînd şi informaţii despre metoda fluxiunilor a lui Newton — dar nu le obţine pentru că acesta vroia să-şi asigure prioritatea.

În 1684, Leibniz publică lucrarea *Noua metodă a maximelor şi minimelor precum şi a tangentelor* — care conţine în esenţă noţiunile de bază ale calculului diferenţial creat de el. Urmează o serie de lucrări *de aplicare*:

Meditaţie nouă asupra naturii unghiului de contact, în care se ocupă de cercul de curbură (v. cap. IX).

Despre geometria ascunsă (1686).

Despre linia care se formează dintr-o infinitate de linii etc. (1692) (problema înfăşurătoarelor).

O nouă aplicaţie a calculului diferenţial (1694) — în care apare mai clar problema inversă, a tangentelor.

Apoi o serie de lucrări de completare şi sistematizare.

În lucrări tipărite şi într-o scrisoare către Hôpital (1693) se ocupă cu derivate de ordin superior, cu derivate parţiale, cu integrarea unor ecuaţii diferenţiale cu ajutorul seriilor.

În lucrarea *Nou exemplu de analiză* (1703), a integrat fracţii raţionale, funcţii trigonometrice şi logaritmice.

În lucrarea *Justificarea calculului infinitezimal* (1702) — ca răspuns la unele critici care îi fuseseră adresate — face o expunere sistematizată a lucrărilor sale. Ele fuseseră publicate în ordinea descoperirii lor treptate: acum puteau fi considerate în ansamblu şi putea fi subliniată unitatea lor logică.

Leibniz a avut preocupări încununate de succes şi în alte domenii matematice, în special în aritmetică. Astfel: A construit o maşină de calcul — păstrată şi azi la Biblioteca din Hanovra — atît de reuşită încît prima fabrică de maşini de calcul din Germania a luat-o ca prototip. A dezvoltat sistemul de numeraţie cu baza 2 — care a devenit azi de o importanţă fundamentală în maşinile electronice de calcul. A calculat valoarea rentei ţinînd seama de dobînda compusă. A redescoperit teorema lui Fermat. În algebră, a pregătit noţiunea de determinant; a enunţat teorema: o ecuaţie de grad superior lui 4 nu poate avea o formulă generală de rezolvare (fără să o demonstreze) etc. S-a ocupat chiar şi cu un joc („solitarul"), preconizînd elaborarea unei teorii matematice în legătură cu jocurile distractive de inteligenţă.

Marea lui operă este însă desigur calculul diferenţial şi integral.

Leibniz este şi filozof. Nu este locul aici să expunem poziţia sa în filozofie. Dar o anumită legătură între opera sa matematică şi cea filozofică există, de aceea vom face cîteva referiri sumare şi la aceasta.

Atît în matematica nouă cît şi în filozofie, el se caracterizează printr-o *gîndire originală*, profundă şi printr-o mare *putere de sinteză*. Trecerea de la lucrările disparate ale predecesorilor la calculul diferenţial şi integral, ca disciplină unitară arată această putere de sinteză, îndreptarea atenţiei spre viziunea de ansamblu. Şi în filozofie el ţinteşte tot *un sistem*, o viziune unitară asupra întregii lumi.

Prin aceasta, ca filozof se deosebeşte profund de Newton.

Principala lor operă matematică este comună. A existat o întreagă polemică în legătură cu prioritatea asupra analizei.

A devenit însă cert că Newton și Leibniz au creat analiza *în mod independent* unul de altul.

Ei au ajuns în acest teren comun, venind din direcții de cercetare diferite, călăuziți de concepții filozofice diferite.

În filozofie, Leibniz este și un continuator dar și un adversar al lui Descartes. El însuși afirmă: „Filozofia carteziană este anticamera adevărului și e greu de a merge mai departe fără a trece pe acolo: dar sîntem lipsiți de o cunoaștere veritabilă a lucrurilor cînd ne oprim acolo".

Leibniz visează o logică universală, un calcul care operînd cu concepte primitive, ireductibile la ceva mai simplu, ar permite prin combinări ale acestora găsirea adevărului. El a scris un articol — pe care nu l-a publicat — intitulat *Mathesis universalis* (matematica universală), axat pe exprimarea simbolică a demonstrațiilor.

Prin aceasta, el poate fi considerat un precursor al logicii matematice moderne.

Această tendință explică faptul că marile succese ale lui Leibniz apar mai ales în matematica *formală*. El găsește *notațiile* și expresiile cele mai fericite, care rămîn în știință. Ideile analizei sînt în metoda fluxiunilor a lui Newton, forma analizei, pe care o mînuim și astăzi ne-a dat-o Leibniz. Semnul $\int$, notația dx a diferențialei lui x; denumirile abscisă, coordonate; distincția între funcții algebrice și transcendente; notația cu indici dubli la o matrice etc. provin de la Leibniz.

Tendința spre o logică universală este destul de înrudită cu aceea din Discursul asupra metodei a lui Descartes. Leibniz își dă seama că, oricît de utilă, ea nu poate da totul. De aceea, el introduce și *principiul rațiunii suficiente*: logica ne poate spune numai ceea ce este posibil, ceea ce *ar putea fi*; acest principiu ar urma să ne arate ceea ce există efectiv.

Mai departe, ne este foarte greu să-l urmărim. Spiritualist, el consideră că esența realității ar fi un principiu imaterial, forța. Forțele primitive le numește *monade*, *puncte metafizice sau de substanță* — exacte ca punctul matematic, reale ca punctul fizic — *puncte formale*, *atomi formali*, *forme sub-*

stanțiale. Fiecare monadă ar constitui o lume aparte, legătura între ele ar fi asigurată printr-o armonie prestabilită.

Să fie oare vreo legătură între monada sa filozofică și noțiunea de diferențială? Să fi existat oare vreo influență de la conceptul matematic la cel filozofic sau invers? Este greu de spus. Dar nu se poate să nu fim surprinși cînd o pretinsă legătură între matematică și metafizică este împinsă atît de departe încît scrierea numerelor în baza 2, numai cu cifrele 1 și 0 să se interpreteze ca demonstrația matematică a creației lumii din nimic (Dumnezeu este 1, nimic 0). Sau o afirmație de felul: „Lumea este o imensă problemă matematică. Dumnezeu este geometrul atotputernic care pune problema și o rezolvă". Nebulozități care amintesc de Pitagora și care ne arată că matematica are criterii atît de sigure, încît un același om poate da creații matematice de valoare o dată cu construcții filozofice fanteziste. Matematica este mereu justă; *interpretările* despre matematică pot fi și eronate.

Newton și Leibniz ne-au învățat să diferențiem și să integrăm. În filozofie, lecțiile lor de asemenea se alătură, de astădată prin contrast, printr-un efect de lumină și umbră. Newton ne arată legătura strînsă între matematică și cunoașterea naturii; Leibniz ne arată pericolele unei gîndiri abstracte, care scapă de sub controlul spiritului critic și al contactului cu realitatea.

Dacă ei sînt la fel de mari în analiza matematică, Newton ocupă o poziție incomparabilă ca creator al mecanicii raționale.

Capitolul VIII

MECANICA RAȚIONALĂ — O MODALITATE NOUĂ A CUNOAȘTERII; PRIMUL CAPITOL ÎN FIZICA MATEMATICĂ

Scurtă schiță

Dacă am căuta să privim istoria gîndirii științifice umane de la distanță, astfel încît să vedem numai linia evolutivă esențială — așa cum s-ar prezenta ea unui „elev" de pe steaua Sirius, căruia profesorul său i-ar cere să rezume ce forme a îmbrăcat viața pe planetuța aceea îndepărtată numită Terra — am fi conduși la următoarea schiță.

După ce pre-omul a început să folosească piatra, omul incipient a început să judece, astfel încît în toate problemele și problemuțele vieții informația directă, prin simțuri — de natura aceleia pe care o au și strămoșii lui, animalele — se amesteca, interferînd, cu informația indirectă, prin deducție logică.

La un moment dat (3 secole se văd din Sirius ca „un moment" ...), omul s-a pasionat să afle lucruri noi numai prin judecată; a învățat să-și așeze judecățile într-un sistem logic. A numit această învățătură Euclid și a pus-o la păstrare, parcă presimțind că îi va fi de folos cîndva. S-a scurs un timp și în completarea acestui mod de a judeca, a învățat să lucreze cu infiniți mici.

Paralel cu aceasta, omul a învățat să facă observații *exacte*; momentul primei observații de acest fel a fost numit Kepler.

El a fost atunci în prezența acestor două lucruri distincte: a) ideea de sistem deductiv, *b)* un grup de constatări exacte asupra unui fenomen din natură.

Şi a venit atunci un moment crucial — numit Newton — cînd omul s-a gîndit să lege pe *a* de *b*. A creat un sistem logic deductiv în care constatările din *b* apăreau ca *unele* teoreme ale sistemului.

Şi, dintr-odată, i s-a deschis un orizont larg. În faţa lui stătea un ogor imens pe care ştia abia acum în ce fel să-l lucreze. Lucrase cu multă uşurinţă pe un teren neted, imaginat, care se numea geometrie, dar care nu-i dădea roade concrete; lucrase pe un teren frămîntat, care se numea experienţă, şi acesta îi dădea roade, dar ele erau zgîrcite, smulse prin eforturi din greu. În momentul Newton, a învăţat să lucreze cu uşurinţa din geometrie, pe terenul fertil al realităţilor de fapt.

A început să lucreze *aici* şi *în acest mod*. Cu avînt, cu entuziasm. Şi cu roade extrem de bogate.

Îmbătat de aceste succese spre exterior, omul a cam uitat de sine; în clipa de faţă, linia evoluţiei lui ulterioare... Ne oprim aici, întrerupe profesorul din Sirius răspunsul elevului său. Sîntem la ora de istoria Terei şi nu la ora de previziuni şi deducţii biologice.

Să revenim şi noi cu expunerea în istorie şi s-o privim acum mai de aproape (ferindu-ne însă de o apropiere prea mare care, prin stufărişul de fapte, ne-ar face să nu mai vedem ideile).

KEPLER JOHANN (1571—1630)

O viaţă zbuciumată, în care necesităţile de ordin material încearcă mereu să-l sustragă preocupărilor ştiinţifice, reuşind uneori să-l perturbe sau chiar, trecător, să-l abată şi să-l întrerupă. Este vina „nenorocului", este, însă, poate, şi vina unui mod prea „calculat" de a privi viaţa — şi e de meditat: nu este oare un viciu legat întrucîtva de activitatea matematică, acea mentalitate de a încerca să cuprinzi viaţa psihică, atît de complexă şi bogată în nuanţe, într-un sistem de ecuaţii?

Reflecții sugerate mai ales de situația matrimonială a lui Kepler.

Numit în 1593, deci la 22 de ani — norocul îi surîde totuși la început — profesor în Gratz, se căsătorește cu o văduvă bogată, care însă este departe de a-i aduce liniștea și fericirea, pe care va fi scontat-o prin „calcul".

În 1599, fu numit ajutorul și colaboratorul lui Tycho Brahe (1546—1601), unul din cei mai abili observatori — și a fost aceasta o șansă enormă pentru izbînda sa științifică, ce compensează neșansele din alte direcții. După ce soția sa, bolnavă de nervi, moare, Kepler se gîndește să se recăsătorească: din nou, cu prea mult calcul: el face o listă cu *unsprezece* variante, punînd pe două coloane — calități, defecte — cele 11 soluții posibile pentru o nouă căsătorie. Rezultatul este, iarăși, nefericit. Lipsă de șansă și în faptul că lista cu un astfel de calcul s-a păstrat în arhiva istoriei; reflex totuși al șansei de a fi rămas în istorie.

Izgonit și de la catedră, e obligat să-și cîștige existența făcînd pe astrologul — conștient, din nenorocire, de falsitatea acestui fapt: degradarea astronomiei, în fața ei opusă, mistică, totuși avînd legătură cu ea, cel puțin prin denumirea care începe tot cu astro...

Deși este cunoscut în special prin legile mișcării planetelor care îi poartă numele, are și remarcabile lucrări de geometrie care duc oarecum mai departe cercetări ale secolului de aur și care, deci, îndreptățesc așezarea lui printre promotorii *renașterii* în matematică. Lucrări care prevestesc și matematica nouă și care l-ar fi putut ajuta să-și adîncească opera principală. În geometria plană se ocupă cu principiul continuității arătînd propoziția importantă: parabola este limita unei elipse la care un focar e menținut fix iar celălalt se depărtează la infinit (analog limita unei iperbole). În opera *Stereometria* (măsuri în spațiu), din 1615, determină volume și arii printr-o metodă în care se întrevede folosirea infiniților mici — îl putem considera deci și un precursor al Calculului integral. Aceste preocupări i-au fost sugerate de o problemă practică: cererea unui negustor de vinuri de a-i da o metodă prin care să afle mai ușor capacitatea butoaielor lui.

Legile lui Kepler

Cînd Kepler a devenit colaboratorul lui Tycho, acesta adunase o serie de observații astronomice precise; în același an, Tycho moare și prețiosul material rămîne lui Kepler. Meritul acestuia constă în a fi știut să *prelucreze* aceste observații și din forma „tabele de observații" să le transforme în *legi de observație*. În primul rînd, a fost studiată planeta Marte — întîmplare norocoasă pentru că orbita ei este mai excentrică, deci forma de elipsă mai ușor de pus în evidență. Mai ușor nu înseamnă ușor în sine; pozițiile planetei fuseseră observate de la suprafața Pămîntului, deci dintr-un punct el însuși în mișcare în jurul Soarelui; Kepler, prin calcule laborioase dar și printr-o ingeniozitate specială, trebuie să stabilească mișcarea reală în raport cu soarele. În plus, el calculează și care *ar fi* coordonatele cerești ale planetei în ipoteza că planeta s-ar mișca pe o orbită circulară — ipoteză enunțată de Copernic, cu marele merit de a fi răsturnat teoria geocentrică (rotirea în jurul Pămîntului) și de a o fi înlocuit — prin teoria heliocentrică (rotirea în jurul Soarelui), pe care Kepler avea nu să o răstoarne dar să-i aducă precizări esențiale. El constată că între longitudinea rezultată din ipoteza circulară și cea din realitate era o diferență de 8 minute, diferență prea mare pentru a putea fi atribuită erorilor de observație — Tycho ajunsese la o precizie a observațiilor în care eroarea era cel mult 1 minut. E locul să subliniem și meritul acestui observator atît de abil care a fost Tycho, care face posibilă marea operă ce avea să urmeze. Constatînd diferența, Kepler, plin de neliniște și îndoială, își reface de nenumărate ori calculele, și pînă la urmă își întărește convingerea pe care o dictau datele obiective, indiferent de simțul armoniei astfel știrbită: planeta nu se mișcă după un cerc. Calculînd și distanța — variabilă — de la planetă la Soare, pentru diverse poziții din cursul unei rotații, făcînd calcule analoge și pentru alte planete, ajunge la primele două legi:

1. Planetele descriu orbite *în formă de elipsă*, Soarele ocupînd unul din focare.

2. Aria descrisă de raza vectoare soare-planetă este proporţională cu timpul în care a fost descrisă.

Conform legii a doua, mişcarea nu este uniformă. Cînd planeta este mai îndepărtată de Soare descrie un drum mai mic (în acelaşi interval de timp) decît atunci cînd este mai apropiată (fig. 46).

Iată marea operă kepleriană: două propoziţii simple, de cîte două rînduri, în care s-au cristalizat tabele cu mii de observaţii migăloase, care, deşi reflectau exact realitatea obiectivă, erau greu de citit, închideau în ele, ascuns, aceste două adevăruri *simple*, uşor de gîndit.

Îmbrăcarea într-o formă matematică simplă a observaţiilor directe constituie o etapă importantă în procesul de cunoaştere — nu şi ultima, cum vom vedea mai tîrziu.

Deocamdată nici această etapă nu este terminată. Kepler observă — ceea ce oricine ar fi putut observa cu datele în faţă — că o planetă se mişcă cu atît mai încet cu cît e mai depărtată de Soare. Această observaţie este însă prea vagă. Care este legătura între timpul de revoluţie a unei planete („anul" planetei respective) şi distanţa ei la Soare? E întrebarea care preocupă pe Kepler, ca o obsesie, timp de 18 ani. Dacă s-ar fi putut „filma" ce s-a petrecut în mintea lui, în

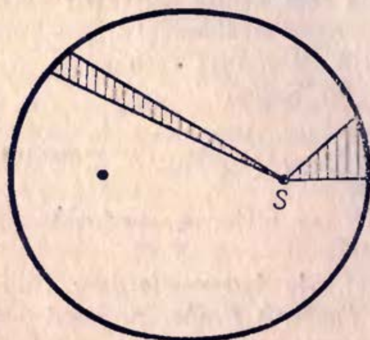


Fig. 46

acest lung răstimp de căutare! În atmosfera de neliniște a ignorării, cată a ieși la iveală, din nou, spiritul pitagoreic; din nou, dorința de simetrie și de simplitate, din nou un fel de concepție mistică încercînd a se substitui spiritului științific nou: supunere la realitate și nu a-i impune ceea ce ne-ar plăcea ca ea să fie. Cei vechi credeau că ochiul trimite ceva spre obiectele pe care le vede; în realitate obiectele trimit raze de lumină pe care ochiul le înregistrează într-un mod propriu de interpretare. Este metafora cea mai potrivită și pentru cunoașterea în general.

Kepler încearcă prin considerații mistice să stabilească o legătură între distanțele planetelor și cele 5 poliedre regulate și chiar publică o lucrare cu o astfel de concepție (Harmonices mundi libri quinque — Armoniile lumii în cinci cărți).

Revenind la spiritul științific modern, el este încă stăpînit de dorința de a găsi o relație *simplă* — ceea ce, am mai spus-o, nu e de condamnat, adesea se dovedește o călăuză bună dacă merge împreună cu ideea că pînă la sfîrșit decizia revine faptelor așa cum sînt și nu cum le-am dori. Kepler compară timpurile de revoluție T cu semiaxele mari a ale planetelor; nu iese nimic. Le compară cu patratele axelor. Din nou nepotrivire, dar acum observă că rezultatele reale se situează *între* cele corespunzătoare puterii întîia și puterii a doua. Atunci compară T, nu cu a, nu cu a^2 ci cu $a^{3/2}$. Acuma da! acum coincidență perfectă! Cu accente de entuziasm — care amintesc străbuna și eterna bucurie a lui evrika — la 15 mai 1618, el anunță ceea ce de atunci se numește legea a treia a lui Kepler:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \ldots = \text{constant}.$$

(T, timpurile de revoluție, a, semiaxele orbitelor, pentru diversele planete).

În titlul operei sale *Astronomia nova*... nu uită să adauge *ex observationes Tychonis Brahe*. Nicicînd o colaborare între un observator și un sistematizator nu a fost mai strînsă și mai fructuoasă.

De la legi descriptive la legi explicative

O clarificare adîncă s-a produs. Legile lui Kepler descriu în mod *exact* și într-o formă *simplă*, ușor de gîndit — chiar, de ce n-am spune-o !, *armonioasă* — mișcarea planetelor. Dar numai *o descriu*.

O nouă întrebare se ridică stăruitoare, neliniștitoare: de ce? *Ce* și *în ce mod* le face să se miște așa și nu altfel?

De la *așa este* la *de ce este așa*, de la legi descriptive la o lege explicativă, un nou salt — esențial — spre care oamenii de știință năzuiesc cu ardoare. Se presimte, mai mult: se simte că explicația va avea o bătaie mult mai lungă, va aduce și alte lumini, spre zări necunoscute și nu numai una mai vie aici, în problema mișcării planetelor unde, de bine de rău, o luminărică prețioasă fusese aprinsă.

Să gîndim și noi, din nou, în spiritul de atunci. De ce traiectoria planetei este curbă și nu dreaptă, de ce întoarsă mereu spre Soare? Dacă planeta ar fi „liberă" în spațiu, din momentul cînd a primit un impuls, ar tinde să se miște *rectiliniu*, pe direcția care i-a fost imprimată. Cînd un glonte pleacă din pușcă, merge drept și drept ar continua să meargă dacă nu ar interveni greutatea să-l tragă în jos, să-i *curbeze* traiectoria. Și planeta, dacă la un moment dat ar fi eliberată, în loc să-și încovoaie mersul, ar porni drept, pe tangentă, ca o piatră care scapă dintr-o praștie pe care o învîrtim în mînă. Înseamnă că e ceva care în fiecare moment nu o lasă să-și continue drumul ei firesc, rectiliniu, și o trage mereu, spre Soare, ca și cînd ar fi legată cu o ață de el. Sau, mai bine, tot astfel cum pămîntul trage glontele în jos și între tendința de a-și continua drumul și aceea de a cădea drept în jos, se alege un drum curb intermediar. Forța cu care Soarele atrage pămîntul e analogă cu greutatea, adică cu *forța* cu care pămîntul atrage glontele și îi curbează traiectoria.

Judecăți juste, dar vagi, și mulți, ca și noi acum, sînt în stare să le facă. Iar alții precizează unele din ele. Galileu, apoi Huygens (1629—1695) enunță *principiul inerției*:

Un corp asupra căruia nu lucrează nici o forță sau stă pe loc sau se mişcă — dacă a primit un impuls — *rectiliniu* şi *uniform*.

E numai un pas, un punct în pregătirea soluției, dar un pas important care numai azi, după ce îl ştim pentru că îl învățăm la şcoală, ni se pare „evident" şi „banal". Realitatea aşa cum e, încărcată cu detalii, nu ne oferă pe tavă acest adevăr; căci nu există mişcare în care mobilul chiar „liber" să nu fie supus la nici o forță care îi frînează mişcarea: frecarea, rezistența aerului... E necesar un proces de *idealizare*, un fel de trecere la limită pentru a trece de la o frecare mică, foarte mică (o bilă pe un plan foarte lucios) la o frecare nulă, pentru a avea această imagine simplă, un corp *nesupus* la nici o forță. Realitatea aşa cum e, neprelucrată de gîndire, nu sugerează principiul inerției, ci unul fals, contrar lui. O căruță merge cînd o trage calul şi cînd calul nu mai trage, stă. Ar rezulta deci că ar fi necesară o forță de tracțiune pentru a menține mişcarea. Aşa gîndea însuşi Aristot care avea totuşi o minte genială.

Deci principiul inerției este important. Dar e numai un punct de plecare. Noi întrebări, mai grele, se ridică. În ce fel o forță modifică mişcarea inițială, rectilinie şi uniformă? Care este forța — direcția ei, intensitatea ei — care face ca traiectoria planetei să fie tocmai o elipsă, care face ca mişcarea planetei să fie tocmai aşa cum o descriu legile lui Kepler?

Legea gravitației universale

Mai mulți oameni de ştiință *au presupus* că *forța* cu care soarele atrage o planetă *este invers proporțională cu patratul distanței*. Într-o scrisoare din ianuarie 1680, *Hooke* a comunicat această presupunere a sa lui Newton — după ce într-o lucrare din 1674 făcea o serie de considerații juste asupra mişcării. Pe baza acestei scrisori a cerut chiar ca Newton să-i recunoască prioritatea. Astronomul Halley

formulase și el această ipoteză. O ipoteză destul de asemănătoare a enunțat *Borelli* în 1666 — pe care Newton îl citează.

Dar ce valoare are o afirmație care nu este dovedită? O valoare diferită de zero totuși destul de mică. A ghici este totuși un succes, dar minor. Profesorul de matematică, în astfel de cazuri, spune: ai ghicit soluția, dar dacă nu știi s-o demonstrezi, degeaba. Succesul este și mai mic cînd nu există cineva care să poată spune: ai ghicit — pentru că răspunsul bun nu este știut. Ghicitul are totuși o valoare *pozitivă* dacă nu s-a făcut la întîmplare sau dînd cu bobii, dacă există considerații obiective, fie și vagi, care fac răspunsul *plauzibil*. În acest caz, el devine o *ipoteză de lucru*, avînd ca rol adunarea la un loc a eforturilor și dirijarea lor într-o direcție dată. Știm și noi că este mai ușoară o problemă de tipul să se demonstreze relația... (care se dă) decît una de tipul să se afle relația care există... ceea ce presupune și demonstrația nu numai aflarea ei.

Problema care s-a pus lui Newton era deci — cel puțin la un stadiu mai avansat al cercetării — : să se demonstreze că din ipoteza unei forțe invers proporționale cu patratul distanței rezultă — matematic — legile lui Kepler. Sau problema inversă: fiind date legile lui Kepler, să se demonstreze pe baza lor că există o forță invers proporțională cu patratul distanței.

Rezolvarea acestei probleme presupune rezolvarea prealabilă a unei probleme mult mai generală: în ce mod (exprimat exact, matematic), o forță dată (care poate varia în funcție de poziție sau și de timp) modifică mișcarea unui corp?

Iar rezolvarea acestei probleme presupune *crearea* unui instrument matematic nou și de mare finețe. Viteza variază de la o clipă la alta, deci în locul noțiunii vechi — viteza e spațiul supra timp — care este simplă dar valabilă numai în mișcarea rectilinie și uniformă, trebuie o definiție și o concepție nouă: viteza *la un moment dat*, care presupune noțiunea de derivată. De asemenea, forța modifică viteza, dar și această modificare variază de la un moment la altul, deci este necesar un calcul diferențial mai complet decît acel care privește numai calculul derivatei. Pe de altă parte,

chiar dacă știm în ce mod forța modifică pe intervale mici sau chiar moment cu moment, viteza, nu este destul; mai trebuie arătat că aceste modificări mici, însumate, dau în ansamblu o anumită traiectorie — în problema de plecare, elipsa. A însuma niște cantități „infinit mici" înseamnă Calculul integral.

Problema pusă lui Newton — sau pe care Newton *și-o* pune — este cea mai complexă problemă care s-a pus vreodată geniului uman. Căci pentru a-i da soluția, Newton trebuie să răspundă *concomitent* la mai multe cerințe, fiecare covîrșitoare. El trebuie — în același timp și nu rînd pe rînd — *să creeze:*

— Calculul diferențial
— Calculul integral
— Mecanica rațională

și, cu aceste instrumente mari, să revină la problema inițială pentru a arăta că din legea gravitației universale rezultă ca o teoremă legile lui Kepler, rezultînd în plus și alte cazuri — ca de pildă posibilitatea unor traiectorii parabolice sau hiperbolice — rezultînd și probleme de calcul ale *perturbațiilor* produse de intervenția atracției și a altor corpuri decît soare — o planetă — și pentru care observațiile ulterioare aveau să aducă o strălucită confirmare.

O oarecare pregătire a soluției Newton o are de la *precursorii* Calculului diferențial și integral, ca și din propriile lui lucrări anterioare în acest domeniu, de la anumite cercetări științifice noi în mecanică — în special ale lui Galileu și Huygens — dar soluția problemei în ansamblul ei revine geniului lui Newton, în unire cu uriașa lui putere de muncă.

La 28 aprilie 1686 este depus la Societatea regală (Academia engleză) manuscrisul lucrării lui Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principiile matematice ale filozofiei naturale), lucrare de importanță crucială pentru tot progresul științific și tehnic realizat de atunci și pînă în zilele noastre. Ca un singur exemplu elocvent să menționăm că problema sateliților artificiali și a vehiculelor interplanetare este în principiu complet rezolvată de atunci. Tim-

pului nostru îi revine meritul realizărilor de ordin *tehnic*: realizarea unei viteze inițiale suficient de mari încît corpul să nu cadă pe pămînt (ci să-l înconjoare) sau a unei viteze și mai mari, datorită căreia să poată ieși din sfera de atracție a pămîntului — viteze *de atunci* calculate; realizarea mașinilor de calcul atît de rapid încît să se poată corecta în timp util traiectoriile, dar calculul în sine al acestor traiectorii este bazat pe principiile stabilite de Newton.

Sîntem cuprinși de o imensă admirație în fața zborurilor cosmice, și pe drept cuvînt. Dar uităm că o parte importantă din admirația noastră se cuvine direct acelui care, acum 300 de ani, a rezolvat problema pe hîrtie, rezolvare esențială, sine qua non, a zborurilor efective de astăzi. Sîntem, cei mai mulți dintre noi, mai impresionați de ceea ce se vede cu ochii decît ceea ce se poate vedea cu mintea. Este nevoie, de aceea, de o meditație specială, ca să apreciem cum se cuvine realizările umane care nu prind decît indirect și o formă concretă. Condensînd, putem spune: Newton ne-a învățat zborul în Cosmos. Dar acesta nu e decît *unul* din mai multe și prețioase lucruri deduse din creația sa. Lui, învățătorului, creatorului i se cuvine cea mai adîncă admirație și recunoștință din partea întregii umanități.

Pe lîngă complexitatea problemei de fond, Newton a întîmpinat și o dificultate exterioară, de ordin pedagogic am spune. Pentru că analiza și, în particular, metoda fluxiunilor descoperită de el nu era cunoscută contemporanilor săi, Newton s-a silit, în *Principia*, să îmbrace demonstrațiile într-o formă geometrică, mai familiară cititorului de atunci.

Pentru că unii din cititorii noștri nu au ajuns încă la studiul analizei, fiind și ei mai familiarizați cu geometria, pentru a le da „o idee" fie și vagă, despre legătura între legea gravitației universale și legile lui Kepler, vom face și noi o schiță bazată mai ales pe geometrie. Deși tratarea completă revine tratatelor de specialitate și se adresează

unui cititor care el însuși se va specializa, și sumara schiță de mai jos necesită un anumit efort de gîndire... (cititorul care nu are o perseverență „newtoniană", o poate sări).

În primul rînd, să expunem însă chestiunile de analiză legate de problema mișcării strict necesare pentru înțelegerea schiței pe care ne propunem s-o dăm.

Mișcarea în plan. Viteză. Accelerație

1. *Ecuațiile mișcării*. Dacă x și y, coordonatele punctului M din plan (fig. 47) sînt funcții date de timp $x = f(t)$, $y = g(t)$, pentru fiecare valoare a lui t, putem calcula pe x și pe y deci putem determina poziția lui M în plan. Cînd t se schimbă, și punctul M își schimbă locul în plan. Cînd t variază, vom avea un punct M variabil, care va descrie o curbă, și putem afla în fiecare moment (din intervalul de timp în care variază t) poziția lui M pe traiectoria sa.

Ecuațiile $x = f(t)$, $y = g(t)$ reprezintă *mișcarea* unui punct în plan.

Dacă luăm un punct fix ω pe curbă, arcul ωM este tot o funcție de t (la fiecare t alt punct M deci altă valoare a arcului ωM).

De asemenea, unghiul $\theta = \omega OM$ este o funcție bine determinată de t. De asemenea aria ωOM.

2. *Viteza la un moment dat*. Vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ este funcție de timp. Definim derivata vectorului $\vec{r}(t)$ în aceeași formă — cu un înțeles de fond mai bogat — ca și derivata unei funcții numerice și anume

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

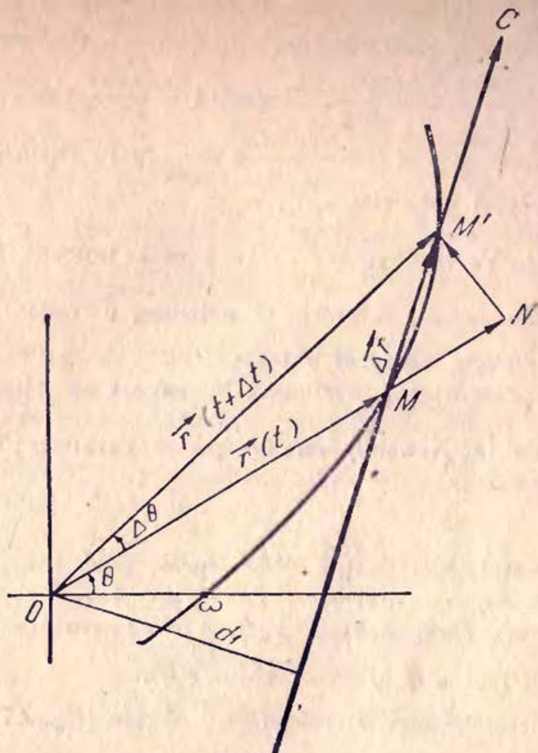


Fig. 47

În acest caz $\overrightarrow{\Delta r}$ (creșterea lui $\vec{r}$) este *vectorul* $\overrightarrow{MM'}$ (fig. 47), iar $\frac{1}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$ este vectorul $\overrightarrow{MC}$ așezat tot pe dreapta MM' însă cu mărimea $\frac{1}{\Delta t} \cdot MM'$ $\left(\text{de } \frac{1}{\Delta t} \text{ ori mai mare decît coarda } MM'\right)$.

Cînd Δt tinde la 0, M' se apropie și se confundă cu M, coarda MM' devine la limită *tangenta* în M la traiectorie;

vectorul MC devine la limită un vector tangent în M la traiectorie și cu mărimea egală cu $\lim \frac{MM'}{\Delta t}$. Avem însă $\frac{MM'}{\Delta t} = \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} \cdot \frac{MM'}{\text{arc } MM'}$. Raportul $\frac{\text{coardă}}{\text{arc}}$ tinde la 1. Rămîne $\lim \frac{MM'}{\Delta t} = \lim \frac{\text{arc } MM'}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ (prin definiția derivatei funcției numerice $s(t)$).

Concluzie. Vectorul $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ este așezat tangent la traiectorie, are sensul mișcării și mărimea v egală cu $\frac{ds}{dt}$.

El se numește vectorul viteză.

Pentru prescurtare, derivarea în raport cu timpul se notează (de la Newton) cu un punct deasupra: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$.

Componentele vectorului $\overrightarrow{MM'}$ (proiecțiile lui pe axe) fiind $x(t + \Delta t) - x(t)$ și $y(t + \Delta t) - y(t)$, rezultă că vectorul viteză are componentele $x'(t)$, $y'(t)$ (derivatele componentelor $x(t)$ și $y(t)$ ale vectorului $\vec{r}(t)$).

O altă descompunere a vectorului $\vec{v}$. Avem (fig. 47)

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'}$$

Împărțim cu Δt și trecem la limită; $\lim \frac{\overrightarrow{MN}}{\Delta t}$ este un vector așezat pe $\vec{r}$ și cu mărimea $\frac{dr}{dt}$ unde r este *mărimea* vectorului $\vec{r}$; pentru $\lim \frac{NM'}{\Delta t}$ observăm că 1) $\widehat{MNM'} = 90° - \frac{\Delta\theta}{2}$ care la limită va fi $90°$; 2) arcul de cerc

$NM' = r(t + \Delta t)\cdot\Delta\theta$; deoarece raportul între coardă și arc tinde la 1, mărimea vectorului $\lim \frac{NM'}{\Delta t}$ va fi egală cu $\lim \frac{r(t+\Delta t)\cdot\Delta\theta}{\Delta t} = r\cdot\frac{d\theta}{dt}$

Obținem $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (1)

unde $\vec{v}_1$ are direcția lui $\vec{r}$ și mărimea $\frac{dr}{dt}$; $\vec{v}_2$ are direcția perpendiculară pe $\vec{r}$ și mărimea $r\cdot\frac{d\theta}{dt}$.

În mișcarea circulară $\frac{dr}{dt} = 0$, rămîne $v = r\cdot\frac{d\theta}{dt}$. (1')

3. *Viteza areolară*. Este prin definiție derivata funcției $A(t)$ egală cu aria triunghiului curbiliniu ωOM. Avem $\Delta A =$ = aria MOM', cuprinsă între ariile celor două sectoare de cerc de unghi $\Delta\theta$, deci

$$\frac{1}{2} r^2(t)\cdot\Delta\theta < \Delta A < \frac{1}{2} r^2(t+\Delta t)\cdot\Delta\theta$$

de unde

$$\frac{dA}{dt} = \lim \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

Altă expresie. Aria triunghiului *rectiliniu* MOM', ΔA_1 este cuprinsă între aceleași limite, deci $\lim \frac{\Delta A_1}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta A}{\Delta t}$. Însă $\Delta A_1 = \frac{1}{2} MM'\cdot d_1$ (d_1, înălțimea, adică distanța de la O la dreapta MM').

$$\lim \frac{\Delta A_1}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim \frac{MM'}{\Delta t}\cdot \lim d_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot d = \frac{1}{2} v\cdot d$$

deci, avem și

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v\cdot d \quad (3)$$

(v mărimea vectorului viteză, d distanța de la O pînă la tangentă)

4. Vectorul accelerație. În fiecare moment t avem un punct M de pe traiectorie și un vector viteză corespunzător, $\vec{v}(t)$. Pentru a vedea mai clar în ce fel variază vectorul $\vec{v}(t)$, luăm un punct fix o ca origină a unor vectori egali cu $\vec{v}(t)$ (fig. 48, unde au fost desenate numai 3 poziții ale lui $\vec{v}$). Acum extremitatea lui $\vec{v}$ descrie o nouă curbă numită hodograful mișcării, în care ca vector de poziție $\vec{r}(t)$ avem vectorul $\vec{v}(t)$.

Definiție. Derivata vectorului viteză, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, se numește vector accelerație. El este egal cu vectorul viteză al punctului V care se mișcă pe hodograful mișcării date.

Putem deci *aplica* formulele de la punctul 2, ținînd seama că acum vectorul de poziție este $\vec{v}(t)$. Obținem:

1) vectorul accelerație, $\vec{a}$ este paralel cu tangenta la hodograf.

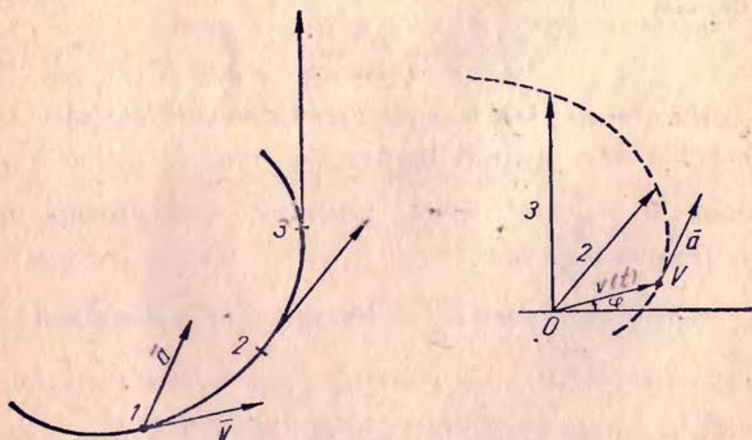


Fig. 48

2) Componentele vectorului accelerație se obțin derivînd componentele vectorului de poziție $\vec{v}$, adică pe $x'(t)$ și $y'(t)$, deci ele sînt $x''(t)$, $y''(t)$.

3) Relația $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, devine

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

unde $\vec{a}_1$ are direcția lui $\vec{v}$ și mărimea $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ $\left(\text{deoarece } \vec{v} = \frac{ds}{dt}\right)$; $\vec{a}_2$ are direcția perpendiculară pe $\vec{v}$ și mărimea $v \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ unde $\varphi(t)$ este unghiul pe care vectorul $\vec{v}$ îl face cu o direcție fixă luată ca origină.

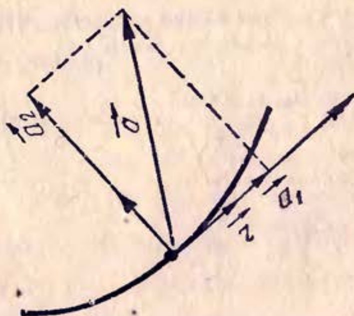


Fig. 49

Desenînd vectorul $\vec{a}$ cu origina în M (fig. 49) putem scrie

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{\nu} \tag{4}$$

unde $\vec{\tau}$ și $\vec{\nu}$ sînt vectori *unitari* (mărimea 1) așezați $\vec{\tau}$ pe tangentă în sensul vitezei, $\vec{\nu}$ pe normală, în sensul concavității curbei.

Prima componentă se mai numește *accelerație tangențială*, a doua accelerație normală.

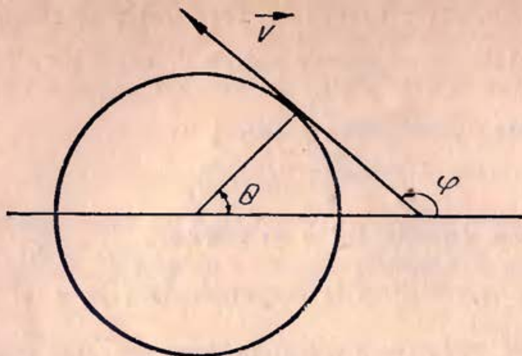


Fig. 50

Caz particular: Să considerăm mișcarea circulară uniformă. Din $s = vt$, rezultă $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$; unghiul φ (fig. 50) este $\varphi = 90 + \theta$, deci $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, viteza unghiulară; $v = R\omega$. Deci, în acest caz, $\vec{a} = R\omega^2\vec{\nu} = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{\nu}$, accelerația are direcția razei și mărimea $\frac{v^2}{R}$.

Relația între forță și accelerație

Să ne imaginăm un punct în mișcare rectilinie și uniformă (fig. 51). 1) Intervenim cu o forță care lucrează pe direcția și în sensul mișcării. Această forță nu va modifica traiectoria, dar va *grăbi* mișcarea, mărimea vitezei va crește. Cum? Depinde de forță și de masa punctului. Pentru același punct, o forță mai mare va avea ca efect un spor de viteză mai mare. Pentru aceeași forță, la un punct cu o masă mai mare, forța va lucra mai greu asupra

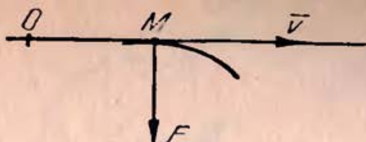


Fig. 51

lui, va influența mai puțin, va da o creștere de viteză mai mică. Dacă punctul are de exemplu masa 2 g, două puncte de masă 1 g „lipite", forța va lucra asupra fiecăruia, jumătate din forță asupra unuia, jumătate asupra celuilalt, e ca și cînd am avea același punct asupra căruia lucrează o forță de două ori mai mică.

Aceste considerații vagi conduc la ipoteza $F = ma$, unde a este creșterea vitezei într-un timp foarte mic, mai precis a este derivata vitezei. Relația exprimă precis, ceea ce anterior fusese exprimat vag (același F, m dublu înseamnă a pe jumătate; același m, F dublu înseamnă a dublu etc.).

2) Să presupunem acum că intervenim cu o forță perpendiculară pe direcția mișcării. Ea va avea acum ca efect *curbarea* traiectoriei. În ce mod? La mișcarea circulară uniformă, accelerația (care este normală) are valoarea $\frac{v^2}{R}$ iar forța care provoacă o astfel de mișcare — și care fusese studiată anterior — este $F = m\frac{v^2}{R}$. Din nou putem face considerații intuitive: să mărim pe F (același punct, același v), traiectoria va fi curbată mai puternic, deci R mai mic; să mărim pe v, menținînd aceeași forță; ea va reuși mai greu să abată punctul din direcția lui, încovoierea va fi mai mică, R mai mare etc.

3) Acum intervenim cu o forță care nu este perpendiculară pe viteză. O descompunem (fig. 52); componenta tangențială va influența mărimea vitezei ca în cazul 1; componenta normală va influența forma traiectoriei ca în cazul 2.

Vom pune în toate cazurile $\vec{F} = m\vec{a}$. Propoziția $\vec{F} = m\vec{a}$ nu este o „axiomă evidentă", nici rezultatul unei experiențe,

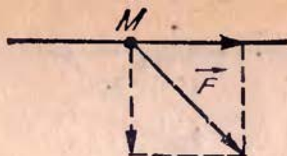


Fig. 52

nici o teoremă, este *un principiu* de bază al mecanicei. Îl admitem ca pe o axiomă, din el, împreună cu alte principii, tragem consecințele logice și *pe acestea* le verificăm în practică. Numai dacă una din aceste consecințe se va dovedi falsă, principiile de bază vor fi infirmate. Deci adevărul unui principiu se verifică prin consecințele lui.

Relația $\vec{F} = m\vec{a}$, înglobează în ea și principiul inerției căci $\vec{F} = 0$, implică $\vec{a} = 0$, adică mișcare rectilinie și uniformă.

Pe baza acestei relații și pe baza legilor lui Kepler, vom deduce legea gravitației universale care a primit strălucite verificări. Pentru aceasta, avem nevoie și de unele cunoștințe despre elipsă.

Elipsa

1. Definiție. Locul geometric al punctelor M pentru care suma distanțelor la două puncte date F și F' este o lungime dată se numește elipsă. (Punctele F și F' se numesc focare — denumire dată de Kepler).

Construcția care traduce direct definiția se face ca în figura 53, lungimea dată fiind luată pe o sfoară, ale cărei capete le fixăm în F și F'. Notăm această lungime cu $2a$ iar distanța $F'F$ cu $2c$. Avem $2a > 2c$. Dreapta $F'F$, ca și mediatoarea segmentului $F'F$ sînt axe de simetrie ale elipsei; punctul O, mijlocul lui $F'F$ este centrul ei de simetrie — căci dacă M este pe elipsă, adică $MF + MF' = 2a$, avem

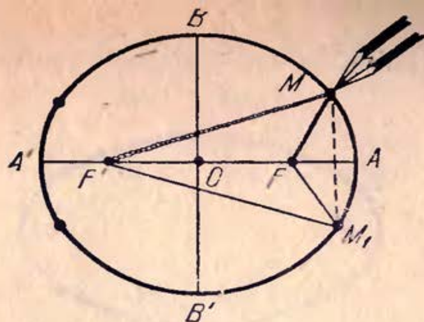


Fig. 53

şi $M_1F + M_1F' = 2a$, unde M_1 este simetricul lui M în una din cele 3 simetrii menţionate (fig. 53).

Cînd M ajunge în B pe mediatoarea lui $F'F$, avem $BF' = BF = a$. Notînd OB cu b, avem $a^2 = b^2 + c^2$. Cînd M este în A, pe dreapta $F'F$, avem $AF' + AF = 2a$; $AO + c + AO - c = 2a$, deci $OA = a$; $A'A = 2a$ este axa mare a elipsei, $BB' = 2b$, axa mică.

Raportul $\frac{c}{a}$ se numeşte *excentricitatea* elipsei. Cînd c este mic în raport cu a (focare apropiate), elipsa este „rotundă" (fig. 54),

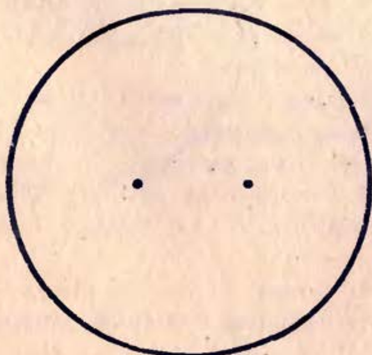


Fig. 54

aproape ca un cerc; cînd c este mare, aproape cît a, elipsa este „turtită" — după cum arată figura 55 sau relația $b^2 = a^2 - c^2$.



Fig. 55

2. *O construcție prin puncte a elipsei și proprietatea optică a elipsei*. Construim cercul de centru F și rază $2a$. Luăm un punct P *oarecare* pe cerc; fie M intersecția între mediatoarea segmentului $F'P$ și raza FP (fig. 56).

1) Punctul M este pe elipsa (cu focarele F', F și axa mare $2a$) — căci $MF' = MP$, deci $MF' + MF = MP + MF = FP = 2a$.

2) Dacă N este un punct *oarecare* al mediatoarei duse, *diferit* de M, avem $NP + NF > FP$, adică $NF' + NF > 2a$, ceea ce arată că N *nu* este pe elipsă. Deci singurul punct al mediatoarei aflat pe elipsă este M, *mediatoarea lui* $F'P$ *este tangenta în* M *la elipsă*.

Rezultă proprietatea: *tangenta la elipsă într-un punct al ei* M *este bisectoarea exterioară a unghiului* $F'MF$. O numim proprietatea „optică" pentru că dacă am avea o oglindă în formă de elipsă (lucioasă în interior) orice rază de lumină care pleacă din F' se reflectă trecînd prin F și reciproc.

Cînd P descrie cercul, M descrie elipsa iar mediatoarea lui $F'P$ devine o tangentă variabilă, „învăluie" elipsa.

3. *Produsul* dd' *al distanțelor de la focare la o tangentă variabilă a elipsei este constant*.

Avem (fig. 56), notînd MF cu r, MF' cu r', $\widehat{F'MF}$ cu α, $d = r \cos \frac{\alpha}{2}$, $d' = r' \cos \frac{\alpha}{2}$, $dd' = rr' \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul $F'MF$, $4c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha = (r + r')^2 - 2rr' (1 + \cos \alpha)$ $4c^2 = 4a^2 - 4rr' \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

de unde

$$dd' = rr' \cos^2 \frac{\alpha}{2} = a^2 - c^2 = b^2 \tag{5}$$

deci produsul dd' nu depinde de punctul M considerat.

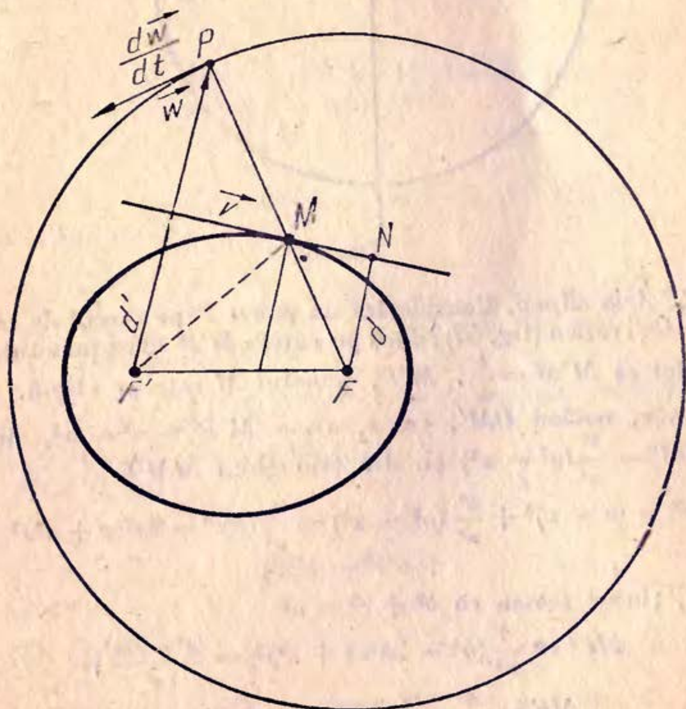


Fig. 56

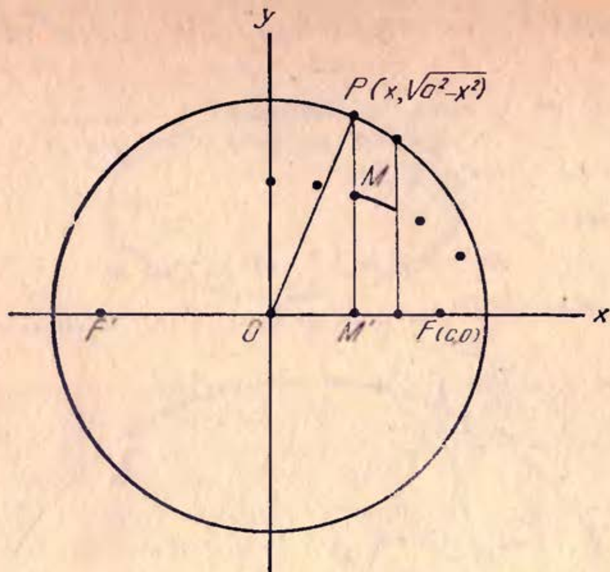


Fig. 57

4. *Aria elipsei.* Considerăm un punct P pe cercul de centru O şi rază a (fig. 57); dacă pe cateta $M'P$ luăm punctul M astfel ca $M'M = \frac{b}{a} \cdot M'P$, punctul M este pe elipsă. În adevăr, notînd OM', cu x, avem $M'P^2 = a^2 - x^2$, deci $M'M^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ şi, din triunghiul $MM'F$

$$MF^2 = (c - x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{1}{a^2}(a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2)$$

sau, ţinînd seama că $b^2 + c^2 = a^2$

$$MF^2 = \frac{1}{a^2}(a^4 - 2a^2cx + c^2x^2) = \frac{(a^2 - cx)^2}{a^2};$$

$$MF = \frac{a^2 - cx}{a} \text{ (căci } c < a,\ x < a)$$

Analog, din triunghiul $MM'F'$, obţinem $MF' = a + \frac{cx}{a}$. Rezultă $MF + MF' = 2a$, deci M este pe elipsă.

De aici se poate deduce că şi raportul ariilor celor două trapeze curbilinii (fig. 57) este tot $\frac{b}{a}$ (sau prin formula $\int_{x_1}^{x_2} \frac{b}{a} f(x)\, dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ dacă o cunoaştem sau prin metoda arătată mai sus sub titlul Aflarea ariilor. Acelaşi raport există între ariile întregi, deci aria elipsei $= \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$.

De la legile lui Kepler la legea gravitaţiei universale

Considerăm vectorul $\vec{w} = \overrightarrow{F'P}$ (fig. 56). Avem pe baza formulei (5), $dd' = b^2$,

$$w = \frac{2b^2}{d}$$

iar pe baza formulei (3)

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} v \cdot d = h$ (constant, cf. legii a doua, presupunînd că soarele este în focarul F).

Rezultă

$$v = \frac{h}{b^2} w$$

Avem şi $\vec{w} \perp \vec{v}$.

Pe baza acestor legături între $\vec{v}$ şi $\vec{w}$, vom afla întîi pe $\frac{d\vec{w}}{dt}$ — mai uşor de aflat geometric — şi pe urmă, cu aju-

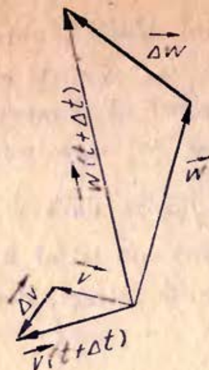


Fig. 58

torul lui, pe $\frac{d\vec{v}}{dt}$. Figura 58 arată că din $\vec{v} \perp \vec{w}$ și $v = mw$ rezultă (prin asemănarea celor două triunghiuri) și $\Delta\vec{v} \perp \Delta\vec{w}$, $|\Delta\vec{w}| = m\,|\Delta\vec{v}|$, de unde, prin trecere la limită,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \perp \frac{d\vec{w}}{dt};\quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = m\left|\frac{d\vec{w}}{dt}\right|,\ \left(m = \frac{h}{b^2}\right)$$

(unghi drept la fel orientat ca și cel între $\vec{v}$ și $\vec{w}$).

1) Deoarece extremitatea vectorului $\vec{w}$ descrie cercul, $\frac{d\vec{w}}{dt}$ este așezat pe tangenta la cerc, deci $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ este așezat pe raza cercului (sensul de la M spre F).

Forța $\vec{F} = m\vec{a}$ este deci o forță pe direcția și în sensul lui MF.

2) Mărimea lui $\frac{d\vec{w}}{dt}$ este, conform formulei (1′),

$$\left|\frac{d\vec{w}}{dt}\right| = 2a\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

Însă din (2)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \text{ rezultă } \frac{d\theta}{dt} = \frac{2h}{r^2} \; (r = FM), \text{ deci } \left| \frac{d\vec{w}}{dt} \right| =$$

$$= \frac{4ah}{r^2} \text{ şi deci } \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{h}{b^2} \cdot \frac{4ah}{r^2} = \frac{4ah^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Mărimea forţei $\vec{F} = m\vec{a}$ este deci $m \cdot \frac{4ah^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$

adică este invers proporţională cu patratul distanţei.

3) Constanta h poate fi obţinută împărţind aria întregii elipse πab cu T timpul unei revoluţii, $h = \frac{\pi ab}{T}$

Înlocuind în expresia forţei, obţinem

$$F = m \cdot \frac{4a}{b^2} \cdot \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} = m \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Însă conform legii a treia, $\frac{a^3}{T^2} = k$, acelaşi pentru toate planetele. Notînd $4\pi^2 \cdot k = \mu$, obţinem

$$F = m\mu \cdot \frac{1}{r^2}$$

expresie care nu mai depinde de elementele (a şi b) ale unei anumite planete.

Am găsit deci că forţa pe care o exercită soarele asupra unei planete este îndreptată pe direcţia MF — este deci o forţă de atracţie — şi este direct proporţională cu masa m a planetei, invers proporţională cu patratul distanţei.

4) Aplicăm acum principiul acţiunii şi reacţiunii: dacă soarele atrage o planetă cu o forţă proporţională cu masa ei, reciproc: planeta atrage soarele cu o forţă egală dar care, fiindcă rolurile s-au schimbat, trebuie să fie proporţională şi cu masa soarelui.

În general, deci, două mase se atrag cu o forţă direct proporţională cu fiecare din ele şi invers proporţională cu patratul distanţei dintre ele (coeficientul de proporţionalitate depinde, evident, de unităţile de măsură alese).

Problema fundamentală a mișcării unui punct material poate fi enunțată astfel: fiind date: 1) forța F care acționează asupra punctului, care poate varia după poziția lui în spațiu și după timp deci $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$; 2) poziția și viteza punctului la un moment dat — să se descrie mișcarea (traiectoria, poziția pe ea în fiecare moment, viteza) — adică să se găsească vectorul de poziție $\vec{r}$ în funcție de t. Ecuația problemei este

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Scriind componentele pe fiecare axă,

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X(x,y,z,t); \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y(x,y,z,t); \quad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z(x,y,z,t)$$

unde X,Y,Z sînt componentele forței, funcții date de x, y, z, t iar $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funcții necunoscute care trebuie să satisfacă acest *sistem de ecuații diferențiale*.

Înțelegem importanța acestui capitol important al Analizei matematice, studiul ecuațiilor diferențiale, instrument esențial în toate problemele de fizică matematică. Capitol prea amplu ca să putem da indicații destul de apropiate asupra lui; ne mărginim să dăm cel mai simplu exemplu.

Punctul M de masă dată m este atras de un punct fix O cu o forță proporțională cu distanța, la momentul $t = 0$ se află la distanța a și are viteza nulă. Să se descrie mișcarea.

Deoarece în acest caz mișcarea va fi rectilinie, luăm dreapta OM ca axă Ox și vom avea o singură ecuație diferențială

$$\ddot{x}(t) = -k^2x$$

Această ecuație este satisfăcută și de $x = \sin kt$ și de $x = \cos kt$, cum se verifică imediat (din $x = \sin kt$ rezultă $\dot{x} = k \cos kt$, $\ddot{x} = -k^2 \sin kt$; din $x = \cos kt$ rezultă $\dot{x} =$

$= -k \sin kt$, $\ddot{x} = -k^2 \cos kt$). Ecuația este verificată și de funcția

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

oricare ar fi constantele C_1 și C_2. Această nedeterminare traduce faptul că numai pe baza cunoașterii forței nu putem spune exact care este mișcarea; ea depinde și de poziția și viteza inițială a punctului. Constantele C_1 și C_2 se determină tocmai pe baza condițiilor inițiale. În problema noastră la momentul $t = 0$, $x = a$. Înlocuind, obținem $C_2 = a$. Tot la momentul $t = 0$, viteza $\dot{x} = k C_1 \cos kt - ak \sin kt$ este zero; deducem $C_1 = 0$. Deci mișcarea are ecuația $x = a \cos kt$. Este o mișcare oscilatorie cu perioada $\frac{2\pi}{k}$. Viteza este $\dot{x} = - ka \sin kt$. Și intuiția ne-ar fi condus la o descriere în linii mari a mișcării. Punctul este în M, o forță îl trage spre O, deci va porni spre O. Viteza spre O va fi din ce în ce mai mare căci mereu acționează forța. Cînd ajunge în O, prin viteza cîștigată își continuă drumul spre stînga, dar acum forța se opune mișcării, deci o întîrzie și la un moment dat o oprește; de aici, mai departe lucrurile se petrec analog însă spre dreapta: forța atrage punctul spre O, viteza crește, punctul trece prin O cu viteză maximă, la dreapta lui O forța se opune mișcării, la un moment dat punctul se oprește și procesul este reluat. Dar intuiția nu ne-ar fi dat și aspectele cantitative, de pildă că punctul după un du-te, vino, ajunge exact în condițiile inițiale (la aceeași distanță de O) pentru a putea afirma că urmează o repetare aidoma în a doua perioadă.

Dar nu avem de-a face numai cu *puncte* materiale ci și cu *sisteme* de puncte. Cazul mai simplu la sisteme de puncte este acela în care două puncte oarecare ale sistemului sînt la distanță fixă. În acest caz, sistemul de puncte formează un *corp solid*. Nu există, în natură, în acest sens strict, corpuri solide; orice corp real este mai mult sau mai puțin deformabil. Din nou deci o noțiune *idealizată*; mai simplă și care va servi ulterior la studiul solidului real.

Pentru a înlesni studiul, se face întîi abstracţie de cauza mişcării, de forţă şi se studiază în genere ce mişcări sînt *posibile* pentru un solid. Studiul pregătitor în care intervine numai poziţia şi timpul se numeşte *cinematică*. În geometrie, se stabileşte că fiind date două poziţii F_1 şi F_2 ale aceluiaşi corp solid se poate aduce F_1 în coincidenţă cu F_2 printr-o *deplasare elicoidală*, adică printr-o rotaţie în jurul unui ax compusă cu o translaţie paralelă cu axul de rotaţie. (În cazuri particulare putînd avea rotaţia nulă, deci suprapunerea numai prin translaţie sau translaţia nulă, deci suprapunerea printr-o rotaţie.) Deplasarea elicoidală se mai numeşte şi *mişcarea-şurub* (căci un şurub pe care îl rotim de un unghi dat, înaintează în lungul axului său).

În cinematică, se demonstrează că oricît de complicată ar fi mişcarea unui corp solid în spaţiu, *la un moment dat* ea apare ca o mişcare şurub. Dacă am putea fotografia vitezele tuturor punctelor, am vedea punctele de pe axă care au numai viteză de translaţie de-a lungul lui, am vedea viteza unui punct depărtat de axă ca un vector tangent la elicea cu acest ax, deci avînd o componentă de rotaţie şi una de translaţie etc. De unde vine atunci complicaţia mişcării? Din faptul că în momentul următor avem o altă mişcare şurub (un alt ax, uşor deplasat, cu altă viteză unghiulară, cu altă viteză de translaţie — evident, puţin schimbate dacă momentele sînt apropiate).

Iată deci, un întreg capitol — independent — al mecanicii, a cărei frumuseţe acum numai o întrevedem.

Să mai dăm un exemplu din care să se întrevadă şi alte probleme ale mecanicii. Mai sus, planeta a fost considerată ca „un punct material", de asemenea Soarele, ceea ce ni se pare o simplificare şi mai exagerată. Ceea ce părea a fi făcut numai din dorinţa de simplificare s-a dovedit a fi şi just în fond, după ce s-a demonstrat teorema: forţa de atracţie exercitată de o sferă este aceeaşi ca şi cînd întreaga ei masă ar fi concentrată în centru. Este o problemă de calcul integral, deoarece va trebui să împărţim sfera în porţiuni mici, să exprimăm forţa exercitată de fiecare porţiune şi să însumăm, trecînd la limită. Şi în alte probleme (aflarea centrului

de greutate, a momentului de inerție etc.) este nevoie de instrumentul calculului integral.

Un caz particular al mișcării este statul pe loc. Important, pentru că în multe situații, ca de pildă în construcții (de case, poduri etc.), noi vrem ca ceva să *nu* se miște. Un capitol al mecanicii va fi deci Statica iar un altul, ajutător, Rezistența materialelor.

Oricît de sumare ar fi aceste indicații sau reamintiri, ne dăm seama cît de intens este folosit instrumentul matematic — calcul diferențial, ecuații diferențiale, calcul integral, geometrie elementară și analitică, calcul vectorial etc. — în prima dintre științele fizico-matematice, prima și cronologic și ca grad de reușită.

Obiectul și structura mecanicii raționale

Explicarea legilor lui Kepler a constituit numai primul pas și primul impuls pentru construirea mecanicii raționale. Gîndirea științifică nu poate fi mulțumită cu explicarea unui caz particular, fie el și foarte important în sine, ea își pune în mod natural problemele cele mai generale și include ca aplicații ale metodei și soluției generale discutarea diverselor cazuri particulare interesante.

Mecanica rațională aduce un aspect nou și foarte interesant în problematica procesului de cunoaștere. *Ca obiect, ea este fizică*: studiază o clasă de fenomene ale naturii — mișcarea. *Ca metodă, ea este matematică*: din cele trei principii de bază enunțate de Newton (al inerției, al legăturii între forță, masă și accelerație, al acțiunii și reacțiunii), *se deduc logic*, folosind și cunoștințe sau metode din geometrie și din analiză, fie „teoreme generale" asupra mișcării, fie descrierea fenomenului concret în condiții particulare date.

Creatorul mecanicii a fost pe deplin conștient de importanța acestui punct de vedere. Newton spune: „A deduce din fenomene două sau trei principii generale ale mișcării și a expune

apoi cum decurg din aceste principii clare însușirile și acțiunile tuturor obiectelor substanței, iată ce ar fi constituit un mare pas înainte în filozofie, chiar dacă cauzele acestor principii n-ar fi fost încă descoperite".*

Cu un astfel de model reușit în față, se va căuta ulterior să se folosească această structură a cunoașterii și în alte capitole ale fizicii. creîndu-se *fizica matematică* iar, recent, și în multe alte domenii, ajungîndu-se la *aplicații ale matematicii* în foarte variate și numeroase domenii. În cadrul acestui proces de aplicare a matematicii, un rol important are noțiunea de *model*. Realitatea brută fiind prea încărcată de detalii, într-o primă etapă se ia în studiu o realitate simplificată, un model, care, prin anumite definiții și principii-axiome, să se preteze la o tratare matematică; rămîne pentru o etapă a doua, confruntarea între teoria construită pe model și fenomenul real.

O astfel de „simplificare" a realității s-a făcut, cum am văzut, și în mecanică, prin luarea în considerație a unor procese „ideale", cum ar fi mișcarea rectilinie și uniformă, a unui punct nesupus nici unei forțe. mișcare ce se continuă veșnic, fără oprire. Cînd se trece la mecanica *aplicată* nu se mai găsesc astfel de cazuri „ideale", ci fenomene mai complexe, care necesită un studiu nou, dar acest studiu este considerabil înlesnit de studiul prealabil al cazului ideal făcut în mecanica *rațională*.

Utilitatea metodei raționale în cunoașterea naturii este vădită. Ceea ce nu înseamnă că nu sînt necesare unele precauții și o adîncire a conceptului de principii.

Natura principiilor

Constituie principiile niște adevăruri sigure și definitive sau sînt ele simple ipoteze? Locul lor este la mijloc, între aceste două calificări.

---

* Citat după S.I. Vavilov, Isaac Newton, Ed. științifică, 1962.

1) Ele sînt mai mult decît ipoteze pentru că, într-o etapă mare a științei, sînt verificate prin toate consecințele teoriei. Pe de altă parte, afirmațiile din principii nu sînt ipoteze arbitrare, *imaginate* (oare nu e așa?), ci au o bază reală, reprezintă o largă experiență generalizată prin inducție. Este celebră afirmația lui Newton: „hypotheses non fingo" (nu imaginez ipoteze). Ea trebuie înțeleasă nu numai în sensul că principiile au o bază reală și se verifică prin consecințele lor ci și într-un sens mai adînc: nu mă ocup cu „cauza ultimă" a principiilor, cu un fel de explicare transcendentă a lor. Ca să găsească legea gravitației, predecesori ai lui Newton au recurs la astfel de cauze și ipoteze construite cu imaginația. Dacă forța de atracție este ca un fluid care se răspîndește în tot spațiul, ea este invers proporțională cu pătratul distanței (analog cu intensitatea iluminării unui corp de către o sursă) — cam aceasta este presupunerea pe care o făcea Bombelli; dacă însă se răspîndește numai în plan, ea este invers proporțională cu distanța — cam așa ceva imagina, la un moment dat, Kepler. Newton nu se ocupă cu natura sau cu proveniența forței de atracție: o constată, îi deduce — cum am arătat — valoarea, trage consecințe.

2) Principiile reprezintă însă mai puțin decît un adevăr definitiv.

Valabile într-o perioadă mare a științei, pot surveni la un moment dat fenomene noi care nu mai corespund exact cu concluziile teoriei. Atunci are loc o *restructurare* a teoriei care își ia ca bază noi principii sau o formă nouă, mai precisă, a principiilor vechi. O astfel de „reformă" a fost realizată în primele două decenii ale secolului nostru de către Einstein. Mecanica lui Newton a rămas valabilă ca o foarte bună aproximație la scara fenomenelor obișnuite. Ea s-a dovedit nevalabilă, fiind înlocuită cu teoria lui Einstein pentru fenomene în care intervin viteze mari, apropiate de viteza luminii (care devine în această teorie viteza maximă posibilă).

În general, folosirea aparatului matematic dă impresia de certitudine absolută. Și în vorbirea obișnuită transpare o astfel de interpretare: — E sigur? — Matematic, răspunde cineva ca metaforă pentru siguranță deplină.

Reflecțiile pe care trebuie să le facem despre natura principiilor ne arată că siguranța matematică aparține numai deducției însăși, lanțului de silogisme. Soliditatea și adevărul obiectiv al concluziilor *depind* de acelea ale premiselor. Nu putem spune: e sigur că... ci: e sigur că dacă..., atunci... .

Construcția unui sistem logic deductiv avînd ca obiect fenomene reale constituie un instrument prețios în studiul lor. Dar nu suficient în sine. Rămîn deschise două probleme: 1) necesitatea unor studii complementare privind *legătura* între teoria — simplă — făcută pe „model" și realitatea — complexă — căreia cată a i se aplica; 2) necesitatea unui mic dubiu activ — ce nu trebuie confundat cu o atitudine *sceptică* — asupra valabilității principiilor, premiselor. Dacă acestea sînt absolutizate, apare tendința de a impune realității să se supună „ideilor" noastre — mai atenuată, totuși analogă cu aceea care îl făcea pe Pitagora să afirme că planetele „trebuie" să fie în progresie muzicală.

Problemele cunoașterii sînt atît de complexe și de importante încît toate căile umane de abordare a lor trebuie folosite și just conjugate. Marile succese ale matematicii moderne nu trebuie să conducă la absolutizarea metodei matematice, cu neglijarea altor căi de acces la adevăr. Desigur, este oarecum „natural" ca entuziasmul față de aceste succese să conducă la tendința de care vorbeam. Numai printr-o astfel de tendință — cred — pot fi explicate încercările de a „matematiza" psihologia și pedagogia — rezultatul acestor încercări fiind că ceea ce se cîștigă în precizie se pierde în esență; studiem „matematic", simplu, frumos, dar ce? — aspecte cu totul periferice, neesențiale ale psihicului uman. Fraza pe care, la începutul capitolului, o atribuiam „elevului" din Sirius „îmbătat de aceste succese, omul a cam uitat de sine" — în acest sens trebuie înțeleasă.

Fiecare eșec are ca revers o parte pozitivă, dar cred că și reciproc, fiecare succes implică anumite pericole. Inclusiv, succesele obținute în matematizarea științelor. De aceea, preocupările privind problematica omului și filozofia cunoașterii în general, psihologia activității matematice în particu-

lar, ca și — mai particular — reflecțiile prilejuite de perspectiva istorică asupra matematicii, trebuie să devină, alături de progresele științifice și tehnice directe, o componentă esențială a culturii.

Unul din cele mai strălucite succese ale fizicii matematice

Această modalitate nouă a cunoașterii, în care experiența directă se împletește cu gîndirea deductivă în sistem logic, al cărei prim succes este mecanica, se va dovedi extrem de fertil.

Să sărim o etapă, pentru a marca mai bine progresul; să amintim în ce mod s-a realizat acea mare descoperire a undelor electromagnetice. Fizicianul englez J.C. Maxwell (1831—1879) cunoaște o serie de legi descriptive, descoperite pînă la el: legea lui Coulomb asupra atracției electrostatice, legea lui Ampère privind cîmpul magnetic produs de un curent electric, legea lui Faraday asupra inducției etc.

Pentru a trece de la aspectul descriptiv la cel explicativ, *el le sintetizează într-un sistem de ecuații diferențiale*. Rezolvarea și discuția acestui sistem îl conduce la o teorie mai cuprinzătoare, care depășește punctele de plecare; în cadrul ei, Maxwell arată existența undelor electromagnetice, stabilește ecuațiile de propagare a acestor unde, arată că raza de lumină este o astfel de undă, în cazul particular cînd lungimea ei este între anumite limite. Natura ondulatorie a luminii fusese descoperită încă de Huygens, dar nu se știa ce anume „vibrează", punîndu-se ipoteza existenței „eterului". Maxwell a lămurit lucrurile; este vorba de un cîmp electric (reprezentat printr-un vector perpendicular pe direcția de propagare) și de un cîmp magnetic (perpendicular pe primul și de asemenea perpendicular pe rază); la un moment dat, cîmpul electric de-a lungul razei formează o sinusoidă, cîmpul magnetic o alta, dar în timp aceste sinusoide se deplasează,

Sînt însă posibile orice lungimi de unde și nu numai cele care dau fenomene luminoase.

Teoria, expusă în celebrul său *Tratat asupra electricității și magnetismului*, a produs, evident, senzație în lumea științifică. Se pune acut problema de *a verifica experimental* previziunile teoriei. Nevoia de verificare era accentuată și de faptul că expunerea din tratat nu era prea clară; dar chiar dacă ea ar fi fost tot atît de clară ca o carte de geometrie, problema verificării rămînea în mod esențial necesară. Revine fizicianului german *H. Hertz* (1857—1894) meritul acestei verificări, montarea unei experiențe de laborator prin care pune în evidență — de astă dată și senzorială — existența undelor numite de atunci unde hertziene.

Un fenomen atît de *interesant* în planul cunoașterii se dovedește a fi și extrem de *util*. Fizicianul italian *G. Marconi* (1874—1937), folosind și descoperirea coherorului de către fizicianul francez *E. Branly*, inventează *telegrafia fără fir*. În același domeniu, aduce importante contribuții și fizicianul rus *Popov*. Perfecționări treptate conduc la invenția radio-ului, apoi a televiziunii, al căror rol în civilizația actuală este imens.

Un exemplu strălucit al felului cum progresează știința; într-o primă etapă, de la experiențe, la legi descriptive, care arată, într-o formă matematică precisă, cum se petrec fenomenele (în mecanică, legile lui Kepler; aici legile Coulomb, Faraday etc.); în etapa a doua, sinteza acestor legi, folosirea instrumentului matematic, în special al analizei, pentru degajarea legilor explicative și dezvoltarea teoriei; în a treia etapă, rezultatele teoriei aduse din nou în cîmpul experienței, în primul rînd pentru verificare, în al doilea rînd pentru aplicații utile.

Sînt aici, perfect ilustrate, treptele cunoașterii arătate de Lenin; de la intuirea vie, la gîndirea abstractă și de aici la practică — aceasta este calea dialectică a cunoașterii adevărului.

Este aici și un exemplu elocvent de conlucrare pe teren științific, între diverse popoare, prin reprezentanții lor de geniu.

Cine și-ar fi închipuit că sistemul logic al lui Euclid, împreună cu probleme de aflare a tangentei și ariilor, împreună cu sistematizarea unor observații astronomice vor avea ca efect îndepărtat faptul că fiecare dintre noi are în camera sa un aparat de radio pentru a se delecta și instrui? Legătura cauzală este ascunsă dar reală. O lecție a istoriei se degajă net: omul să-și sporească forța inteligenței sale; la ce bun — viitorul o va arăta cu certitudine.

Capitolul IX

PRIN ANALIZĂ LA O NOUĂ GEOMETRIE

Curbura

Am văzut că dacă asupra unui punct în mişcare rectilinie şi uniformă intervine o forţă (avînd şi componentă perpendiculară pe dreaptă) ea curbează traiectoria. Ne dăm seama că dacă forţa este mai mare, o va curba „mai mult". Dar ce înseamnă că o curbă este „curbată" mai mult, mai puţin? Să nu ne mai gîndim la forţă, la modul cum s-a făcut încovoierea şi să privim nişte curbe gata „curbate" ca cele din figura 59. Ne dăm seama că cea din *b* este mai curbată, mai încovoiată ca cea din *a* — vom zice are *o curbură* mai mare. De asemenea, ne dăm seama că cea din *c* în punc-

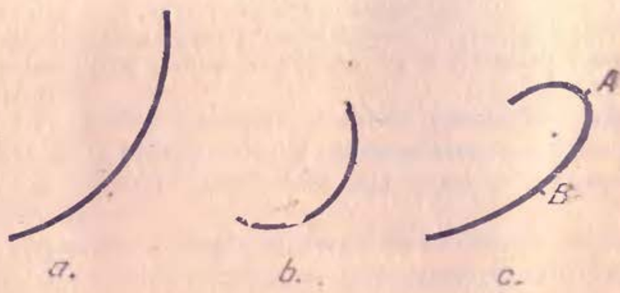


Fig. 59

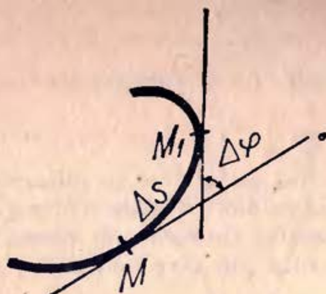


Fig. 60

tul A se încovoaie mai repede decît în punctul B — vom zice curbura în A este mai mare decît curbura în B. Deci curbura este rapiditatea încovoierii.

Desigur, nu putem lucra cu noțiunea de curbură în această formă neprecisă, care traduce mai mult o impresie. Trebuie să-i dăm o definiție matematică precisă. Nu însă *arbitrară*, ci așa fel încît definiția să nu contrazică impresia intuitivă, ci numai să-i dea o formă precisă.

Este natural să determinăm încovoierea într-un interval dat, prin unghiul tangentelor (fig. 60). Acest unghi variază însă după arcul MM_1; deci unghiul în sine nu ne spune nimic. Îl vom raporta la lungimea arcului.

Definiție. Raportul $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, unde $\Delta\varphi$ este unghiul tangentelor în M și M_1, iar Δs arcul MM_1 se numește *curbură medie* (în intervalul M, M_1).

Am vorbit însă despre curbura în punctul A, în punctul B, le-am comparat. Cum vom defini curbura într-un punct dat? Prin același proces de gîndire prin care trecem de la noțiunea de viteză *medie* la aceea de viteză la un moment dat. Deci

Definiție. Numim curbura în punctul M, $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$.

Cazul cercului. Dacă aplicăm definiția la un cerc (fig. 61), $\Delta\varphi$ este egal cu unghiul razelor, deci (fiindcă îl măsurăm în radiani), $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$ şi curbura medie este $\frac{\Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} = \frac{1}{R}$.

Aici limita e tot $\frac{1}{R}$, curbura într-un punct coincide cu curbura medie — tot astfel cum în mişcarea uniformă viteza coincide cu viteza medie. Ne dăm seama şi intuitiv că: 1) *în toate punctele cercului curbura este aceeaşi*; 2) *ea este invers proporțională cu raza* (un cerc mai mare, arcul se încovoaie mai lent).

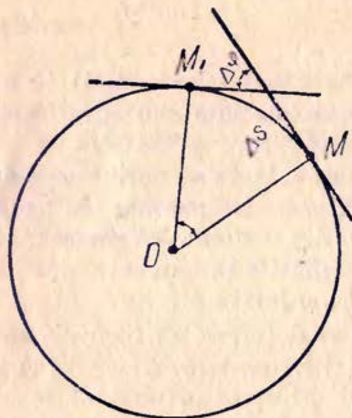


Fig. 61

La o dreaptă, curbura este în fiecare punct, zero.

Pentru dreaptă şi cerc, curbura este aceeaşi în toate punctele. În general însă, ea variază de la un punct la altul.

Pentru că la cerc $k = \frac{1}{R}$, deci $R = \frac{1}{k}$, considerăm şi la o curbă oarecare *inversul curburei* şi îl numim *rază de curbură*. Pentru a aprecia şi vizual curbura unei curbe în M, desenăm un cerc ca în figura 62, a cărui rază este raza de curbură în M (arcul acestui cerc „se lipeşte" în M de al curbei). Acest cerc se numeşte cercul de curbură.

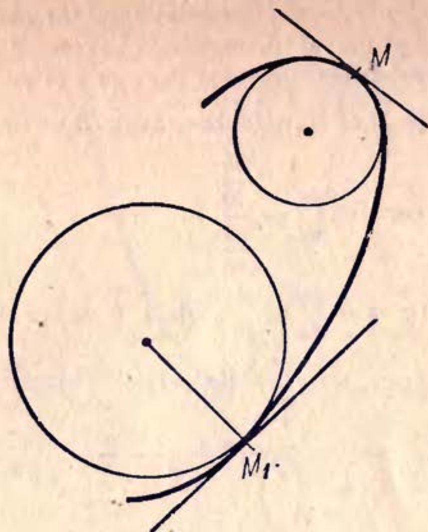


Fig. 62

Calculul curburei. Să presupunem că s-a dat curba prin ecuațiile $x = f(t)$, $y = g(t)$. Așa cum am mai observat, $s =$ $=$ arc O_1M_1, $(\theta = O_1OM)$, φ sînt funcții de t — fiind dat t, putem găsi cît este s sau θ sau φ (fig. 63). Putem lua pe s

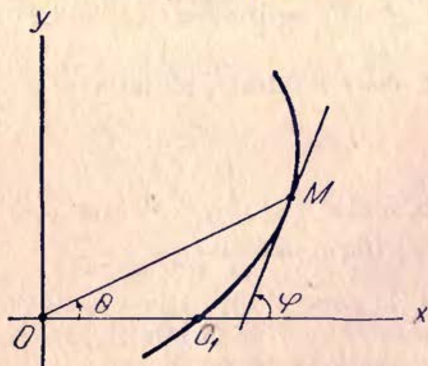


Fig. 63

ca variabilă independentă; fiind dat s putem găsi punctul M (pentru o mişcare destul de regulată, în care M nu s-a întors înapoi pe aceeaşi traiectorie), şi deci pe t şi pe φ.

Considerînd pe φ ca funcţie de s, avem $k = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$.

Se demonstrează că $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$.

Avem: 1) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$, deci $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y'}{x'}$. Putem scrie $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$, $u = \frac{y'}{x'}$; din relaţia $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t}$ rezultă

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2}$$

$$2)\ \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta c} \cdot \frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta c} \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}}$$

Trecînd la limită şi ţinînd seama că raportul între arc şi coardă tinde la 1, obţinem

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Reunind cele două rezultate, obţinem

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Aplicaţie. Fie curba $x = t$, $y = t^2$ care este o parabolă ($y = x^2$, fig. 64). Obţinem $k = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$

Pentru $t = 0$ (în punctul 0), avem $k = 2$. Cînd t creşte, k descreşte — ceea ce se vede şi intuitiv, dar acum putem calcula exact curbura în fiecare punct.

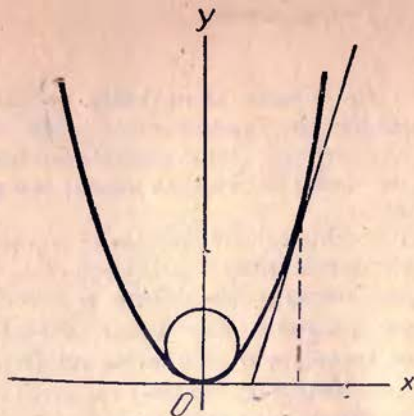


Fig. 64

Precizarea acțiunii forței

Acum putem răspunde mult mai bine la întrebarea în ce fel forța curbează traiectoria.

Să reluăm formula (4) de la pagina 229. Ea arată că accelerația normală este egală cu $v \cdot \frac{d\varphi}{dt}$. Însă $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k \cdot v = \frac{1}{R} \cdot v$ (unde R este raza de curbură; v este mărimea vectorului viteză egală cu $\frac{ds}{dt}$). Așadar, accelerația normală $= \frac{1}{R} v^2$. Știind că $\vec{F} = m\vec{a}$, rezultă $\frac{1}{R} = \frac{F_n}{mv^2}$; formulă care arată clar în ce fel curbura traiectoriei depinde de componenta normală a forței și de viteza punctului.

Noi probleme

Am prezentat noțiunea de curbură în legătură cu o problemă — fundamentală — de mecanică; am văzut însă că ea, curbura, este o calitate intrinsecă a curbei, independentă de faptul dacă ea s-a născut sau nu prin *mișcarea* unui punct.

Deci analiza deschide drum nu numai mecanicii ci și unei ramuri noi a geometriei pure; de la geometria greacă în care se studiau figuri formate din drepte și cercuri, precum și conicele (elipsa, parabola, hiperbola) ca secțiuni ale unui con circular se trece, prin geometria analitică, la studiul curbelor oarecare. Noțiunile analizei fac posibil și interesant un studiu mai adînci t: nu numai forma globală a curbei sau o proprietate comună a punctelor ei care să conducă la definirea ca loc geometric, ci și chestiuni de felul curburii, care să ne arate cum se comportă curba în vecinătatea unui punct.

Cu acest punct de vedere nou și posedînd acest instrument nou al analizei, curbura este o noțiune de bază, dar nu singura. Se pun și alte probleme de aceeași natură care formează la început un capitol al analizei — Aplicațiile analizei la studiul curbelor și suprafețelor — dar care pe urmă, prin anumite generalizări, devine o disciplină nouă, numită geometrie diferențială.

Vom indica — din păcate, foarte sumar — unele din problemele ei.

Torsiunea

Am considerat o curbă *plană*. Să considerăm o curbă *strîmbă* (neplană). Pentru comoditatea expunerii, s-o privim tot ca pe traiectoria unei mișcări, deși, și acum, interesează curba în sine. Definim ca și în plan vectorul

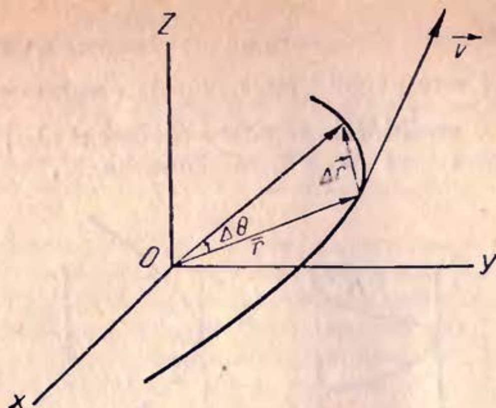


Fig. 65

viteză ca derivata vectorului de poziție, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (fig. 65); el este așezat pe tangentă și are mărimea $\frac{ds}{dt}$. Formula (1) (pag. 227) rămîne valabilă, înțelegînd prin $\frac{d\theta}{dt}$ limita lui $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.

Vectorul accelerație se definește, ca și în plan, ca derivata vectorului viteză, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Acest vector $\vec{a}$ împreună cu $\vec{v}$ determină un plan (trecînd prin M), numit *planul osculator* la curbă în M. În termeni intuitivi putem spune că acest plan, care conține și pe $\vec{v}$ și derivata lui $\vec{v}$, este planul *cel mai lipit* de curbă care se poate duce prin M. Cînd curba este plană, planul osculator este chiar planul curbei. Cînd curba este strîmbă, tangenta în punctul M și un punct vecin M_1 determină un plan; limita acestui plan cînd M_1 tinde la M este tocmai planul osculator. Tangenta are *două* puncte confundate comune cu curba; planul osculator are *trei* puncte confundate comune cu curba.

În fiecare punct al curbei e un alt plan osculator. Raportul $\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$, unde ψ este unghiul între planele osculatoare în M şi M' iar Δs = arc MM' se numeşte *torsiune* medie, iar limita acestui raport cînd $\Delta s \to 0$, torsiunea în M.

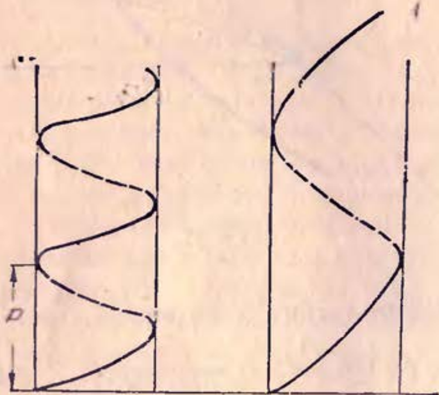


Fig. 66

Curbura este rapiditatea de *încovoiere*; torsiunea este rapiditatea de *răsucire* a curbei. În figura 66 sînt desenate două elice; elicea este traiectoria unui punct care se mişcă pe un cilindru circular aşa fel încît înălţimea punctului h, este proporţională cu unghiul de rotaţie α; $h = k \cdot \alpha$. Ea are forma unui drot de somieră. Mărimea $p = k.\ 2\pi$, cît se ridică punctul într-o rotaţie completă, se numeşte *pasul* elicei. Ne dăm seama că la o elice cu pasul mai mare, torsiunea este mai mare, planul osculator al curbei se răsuceşte mai repede (la o elice torsiunea este aceeaşi în toate punctele — ceea ce nu se întîmplă la o curbă oarecare).

Iată nişte indicaţii foarte vagi dar care arată încă o serie de probleme care se deschid, ca obiect al geometriei diferenţiale.

Cînd este vorba de o curbă, aspectele diferențiale sînt: rapiditatea de încovoiere într-un punct (curbura) și rapiditatea de răsucire (torsiunea).

Cum vom studia și caracteriza o suprafață în vecinătatea unui punct?

Dăm aici unele indicații numai asupra uneia din problemele care se deschid. Într-un punct regulat al unei suprafețe se poate duce un plan tangent (se demonstrează că toate curbele de pe suprafață care trec printr-un punct M al ei, au tangentele în M în același plan, numit plan tangent). Perpendiculara în M pe planul tangent se numește normala la suprafață. Un plan trecînd prin normală taie suprafața după o curbă numită secțiune normală.

Pentru a vedea „cum se comportă" suprafața în vecinătatea unui punct M, considerăm toate secțiunile normale și studiem curburile lor. Vom arăta cîteva exemple caracteristice.

Să considerăm întîi paraboloidul de rotație (fig. 67) și planul tangent în vîrful său. Deoarece, aici normala este chiar axa de rotație, toate secțiunile normale vor fi parabole egale (aceeași parabolă rotită). Dar acesta este un caz excepțional. În orice alt punct al paraboloidului, chiar dacă este de rotație, nu se mai întîmplă așa.

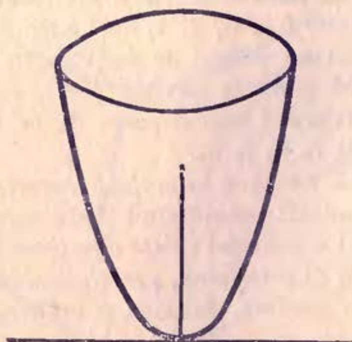


Fig. 67

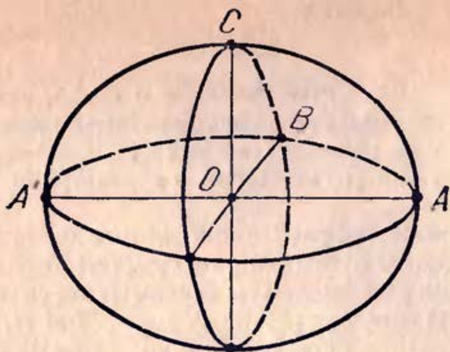


Fig. 68

Să considerăm acum un elipsoid, un corp în care toate secțiunile plane sînt elipse (fig. 68). Ca material intuitiv poate servi un săpun de toaletă (oval, putînd fi înscris într-o cutie paralelipipedică cu cele trei dimensiuni neegale). Elipsoidul are trei axe de simetrie. Să cercetăm curburile secțiunilor normale în punctul C aflat la vîrful uneia din axe. Secțiunea prin planul figurii este elipsa de axe a și c; cea prin planul perpendicular pe planul figurii este elipsa de axe b și c. Dacă $a > b > c$, prima elipsă are curbura k_1 mai mică decît a doua, k_2. Un plan de secțiune intermediar dă o elipsă cu axele a_1 și c unde $b < a_1 < a$, deci curbura ei va fi între k_1 și k_2. Așadar rotind planul de secțiune în jurul normalei de la poziția AOC pînă la poziția BOC, curbura k *crește* de la k_1 la k_2; rotindu-l mai departe de la BOC la $A'OC$, curbura k scade de la k_2 la k_1.

Se demonstrează că *la o suprafață oarecare* lucrurile se întîmplă analog, adică: considerînd toate secțiunile normale într-un punct M al suprafeței *există o secțiune în care curbura k_1 este minimă și o altă secțiune, perpendiculară pe prima, în care curbura k_2 este maximă.* Acestea se numesc secțiuni principale. Rotind planul de secțiune, ca și în cazul elipsoidului, curbura crește de la k_1 la k_2, apoi scade de la k_2 la k_1.

Nu totdeauna însă secțiunile de maxim și minim au concavitățile îndreptate în același sens — ca la elipsoid. Ele pot avea sensuri contrarii ca în exemplul de mai jos. Considerăm un paraboloid hiperbolic; forma lui este aceea de la o șa de călărie, numai că mai regulată: secțiunea în șa (printr-un plan care ar trece prin coada calului și printre urechile lui!) este o parabolă cu vîrful în jos, cea din planul figurii (în fig. 69); secțiunea printr-un plan perpendicular pe primul este tot o parabolă însă cu vîrful în sus. Considerînd pozitivă curbura atunci cînd concavitatea este în sus, negativă cînd e în jos, notînd prima cu k_2, a doua cu $-k_1$, a unei secțiuni oarecare cu k, avem $-k_1 < k < k_2$. Cînd planul de secțiune se rotește de la poziția cu curbură $-k_1$, pînă la aceea cu k_2, curbura k crește de la $-k_1$ la k_2. Va exista o poziție intermediară cu curbura zero. Rotind de încă 90°, curbura scade de la k_2 la $-k_1$, deci mai întîlnim o secțiune cu curbură zero. O curbă are curbura zero într-un punct de in-

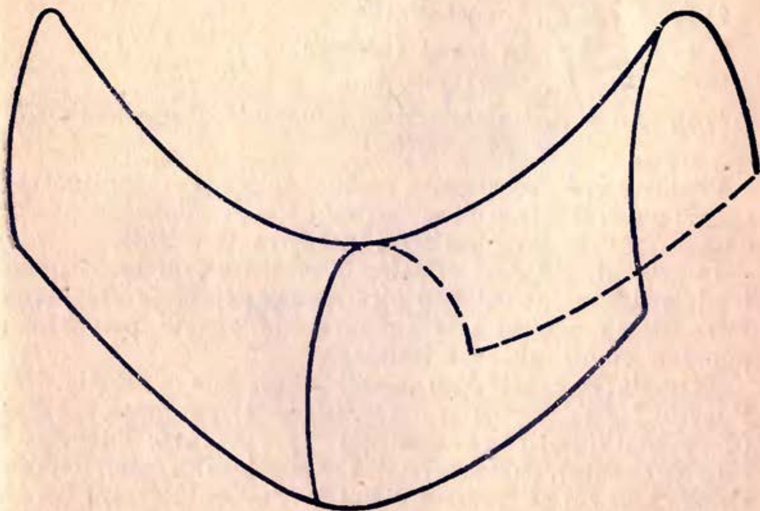


Fig. 69

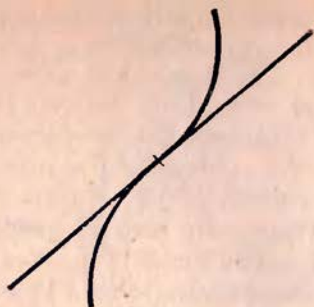


Fig. 70

flexiune (fig. 70), în vecinătatea căruia ea are forma unei drepte.

Un al treilea caz este acela în care $0 < k < k_2$, adică secțiunea de curbură minimă are curbura zero.

Punctele unei suprafețe oarecare se clasifică astfel:

1) $k_1 < k < k_2$, *punct eliptic*
2) $-k_1 < k < k_2$, *punct iperbolic*
3) $0 < k < k_2$, *punct parabolic*
4) $k_1 = k = k_2$ (toate secțiunile normale aceeași curbură), *punct ombilical*

Produsul $k_1 k_2$ se numește curbură totală. Deci mai putem spune: punctul este eliptic, iperbolic sau parabolic după cum curbura totală este pozitivă, negativă sau nulă.

În general, punctele eliptice formează o regiune a suprafeței, punctele iperbolice o altă regiune: linia de despărțire între aceste regiuni este formată din puncte parabolice; punctele ombilicale sînt izolate.

Exemplu. Să considerăm suprafața unei oale de lut (fig. 71). Punctul 1 este iperbolic; o secțiune principală este profilul (din planul figurii) cu concavitatea spre dreapta; a doua este cercul orizontal, cu concavitatea spre stînga. Toate punctele situate mai sus ca punctul 3 sînt iperbolice. Punctul 2 este eliptic; de asemenea toate punctele mai jos ca 3. Punctul 3

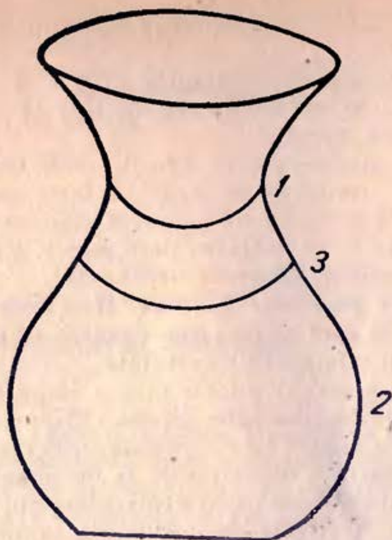


Fig. 71

este parabolic; profilul are în 3 un punct de inflexiune, deci curbura nulă; toate celelalte secțiuni au concavitatea spre stînga. Toate punctele la aceeași înălțime cu 3 sînt pe o linie (cercul), care desparte regiunea punctelor eliptice de aceea a punctelor iperbolice.

Theorema egregium

Două suprafețe se numesc aplicabile una pe alta dacă există între punctele lor o corespondență care păstrează distanțele. Exemplul cel mai simplu: un con (sau un cilindru) este aplicabil pe plan; prin desfășurarea lui pe plan, arcul care unește 2 puncte de pe con, devine arcul

care unește punctele corespunzătoare din plan și care are aceeași lungime.

Gauss a demonstrat teorema:

Două suprafețe aplicabile au în puncte corespunzătoare aceeași curbură totală.

— teoremă considerată ca una din cele mai frumoase ale matematicii — stabilește o legătură între aspecte îndepărtate: lungimile curbelor de pe suprafață, felul cum se încovoaie suprafața în vecinătatea unui punct. Ea a fost numită theorema egregium (teorema strălucită).

Acestea sînt probleme *generale*. Dar dacă alegem curbe sau suprafețe la care se mai pun condiții în plus, se deschid noi și frumoase cîmpuri de cercetare.

Ca exemplu elocvent putem cita o importantă lucrare a geometrului român Gheorghe Țițeica (1873—1939). El consideră suprafețele pentru care curbura totală este proporțională cu puterea a patra a distanței de la un punct fix la planul tangent, găsind o serie de proprietăți interesante; aceste suprafețe au rămas în știință cu denumirea *suprafețe Țițeica*.

În esență, geometria diferențială — una din cele mai frumoase ramuri ale matematicii — adoptînd o metodă nouă, analiza, capătă și un obiect nou: proprietăți care nu puteau fi studiate fără această metodă. Dacă geometria analitică e nouă prin metodă, cea diferențială e, în totul, nouă.

Capitolul X

PROBLEMELE EVOLUȚIEI ANALIZEI

Un fel de clasificare

Fraza „Newton și Leibniz sînt creatorii analizei" trebuie adîncită. Nici unul, nici altul nu au scris tratatul de analiză pe care învățăm astăzi; acest tratat conține numeroase nume proprii ale unor matematicieni de mai tîrziu, iar numele celor doi creatori e în el destul de rar pomenit. Fenomenul Euclid — o carte valabilă 2 000 de ani, după care se fac cel mult adaptări — nu s-a mai repetat. Obiectul analizei este cu mult mai complex decît al geometriei. Implicațiile ei în studiul naturii, mult mai bogate și mai adînci. Euclid e mare prin ceea ce a făcut. Newton și Leibniz sînt mari prin perspectivele și drumurile efective pe care le-au deschis.

În matematică există idei și există probleme. Ideile sînt cu atît mai de valoare cu cît deschid mai multe probleme. Criteriul prin care le apreciem se reduce la atît, la fertilitatea cîmpului deschis; nu este neapărat necesar ca aceste idei să fie complete. Sau sistematizate și perfect clare din punct de vedere logic. Sau accesibile, reușite pedagogic. Așa au fost ideile creatorilor analizei: fertile; cred că nu exagerez spunînd că de la descoperirea roții și a focului, nu au existat în știință idei mai fertile. Dar ele nu au fost nici complete, nici perfect logice și nici expuse pedagogic.

În cele două secole următoare, s-a deschis matematicienilor un larg cîmp de activitate. Dacă în această activitate

vastă, impetuoasă — deci dominată de o anumită dezordine — am vrea totuşi să introducem a posteriori o clasificare, criteriile ar fi cele indicate mai sus.

1) În primul rînd, există un efort de înţelegere a ideilor şi noilor metode, împreună cu acela de a le da o formă mai accesibilă, prin care ele să circule, să se răspîndească — în sens larg ar fi aici o problemă pedagogică.

2) Probleme de completare. După natura lor:

a) probleme axate pe curiozitatea matematică, pe tendinţa de a da soluţii complete, cu discuţia tuturor cazurilor — cu o anumită indiferenţă de moment faţă de aplicaţiile lor practice. Dacă s-a găsit dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei arctg x de către Leibniz sau a binomului lui Newton pentru exponent fracţionar — alte funcţii nu pot fi scrise ca serii? În ce fel? Dacă s-au rezolvat anumite ecuaţii diferenţiale, ivite în probleme de mecanică sau de geometrie, cum s-ar putea rezolva altele?

b) probleme axate pe interesul pentru cercetările de fizică.

3) Probleme de sistematizare a ideilor, cu tendinţa „ideală" de a se ajunge la o construcţie logică impecabilă.

Clasificare post-factum şi puţin cam forţată. Căci, în realitate, aceste preocupări se împletesc una cu alta, soluţiile apar în ordinea în care se ivesc şi nu pe baza unui plan de cercetare sistematic. Sistematic ni s-ar părea că *întîi* trebuie clarificate ideile de bază şi *pe urmă* trase noi consecinţe şi *pe urmă* predate în învăţămînt. Cercetările au însă, cum spuneam, un caracter impetuos. De vreme ce se obţin rezultate frumoase şi utile, de ce să întîrziem asupra fundamentelor? de ce să pretindem o construcţie pur logică şi demonstraţii absolut riguroase, cînd rezultatele se verifică atît de bine în fapt? Un matematician spunea: calculează, calculează înainte; încredinţarea că e bine va veni mai tîrziu. Astăzi noţiunea de infinit mic este — pe drept, dintr-un anumit punct de vedere — criticată. Istoric, e un exemplu elocvent de idee neperfectă cu rezultate extrem de utile. Abia după ce vîna noutăţilor şi aplicaţiilor s-a mai subţiat, a rămas loc pentru preocupările de rigoare ale analizei moderne.

Preocupările pedagogice nu sînt nici ele izolate. Multe completări — formule și teoreme noi — apar prima dată nu în reviste de cercetări, ci în *cursurile* de analiză ținute de profesori mari. Iar tendința spre clarificare a bazelor apare și ea treptat, tot prin prisma necesității de a face expunerea pentru studenți, mai clară. Din păcate, ca și cu Euclid, se va ajunge cîndva la o clarificare așa de mare încît studenții cu greu o vor mai putea înțelege...

Probleme multe; și foarte mari și mari și mai mărunte. Cercetători mulți. Mulți dintre ei, nume mari, asupra cărora s-ar cuveni să ne oprim, la fiecare, în de aproape. Cerem iertare că nu o vom putea face: nu vrem să înșirăm nume de oameni sau de opere fără să intrăm, măcar prin schițarea în mare a ideilor, în conținut. Ne mărginim la sfatul ca cititorul care va intra mai tîrziu în studiul mai complet al matematicii superioare să-și pună el însuși problema de a descoperi cum a gîndit acel care a descoperit o anumită teoremă sau o teorie; și să se ajute și de o istorie a matematicii, mai completă decît cea de față, care nu e decît o simplă însăilare, uneori destul de subiectivă.

Vom menționa totuși unele nume, care ni se par mai reprezentative. Întîi însă cîteva cuvinte despre

Atmosferă

Nu cunosc legile modei. Nu-mi dau seama prin ce înlănțuire cauzală dacă niște tineri „originali", undeva în Occident, și-au lăsat barbă sau și-au pus pantaloni care aveau rost cînd jumătate din viață se petrecea pe cal, urmează cu necesitate ca și mulți tineri din București să-și lase barbă sau să umble pe Calea Victoriei în pantaloni de călărie. Știu însă că unele mode își au un rol pozitiv; în special, unele mode legate de o mișcare artistică sau de una de idei. Se creează o anumită atmosferă socială favorabilă acelei mișcări; „se poartă" ideile respective de către cei mulți, fără rost și fără

înțelegere, ca și pantalonii de călărie fără cal. Dar aceasta face ca cei puțini, care le înțeleg, să aibă un climat favorabil activității de fond. În cursul istoriei, au existat epoci cînd matematica nu era la modă; o făceau niște oameni izolați, ciudați, excentrici. Motive mai adînci o făceau să meargă înainte și fără modă — dar mai greu. Deci moda nu e o condiție esențială aici, e un simplu adjuvant...

Teoria lui Einstein devenise după primul război mondial un subiect la modă. Se discuta prin saloane și prin cafenele, se discuta mai ales în tren căci nu se putea să plece trenul fără ca cineva să observe cu superioritate: după Einstein, nu noi plecăm, gara pleacă, trenul rămîne. Asta însemna teoria relativității... cînd se știe că înțelegerea ei necesită un aparat matematic extrem de special...

Un fenomen analog pare a se fi petrecut în legătură cu „popularizarea" analizei matematice în epoca ei de început. Polemica între Newton și Leibniz pe tema cine a fost primul — deși pune într-o lumină cam defavorabilă niște oameni cu o inteligență atît de superioară — a făcut oarecare zgomot social. Au apărut o serie de „suporteri" ca și cînd ar fi fost vorba de o performanță sportivă (în fond acest caracter sportiv îl are într-o măsură și matematica; e vorba de performanțele gîndirii). Englezii susțineau că Newton a fost primul, dar nu a publicat la timp — era să spun nu s-a omologat. Nemții susțineau că Leibniz a publicat și nu a avut cum să tragă cu ochiul la Newton.

Poate că acest zgomot a pus întîi subiectul pe tapet. Cert e că el a intrat și în discuția „profanilor". În Franța, analiza matematică s-a introdus mai greu. L'Hôpital a fost unul din pionierii ei. Dar, cîtă vreme moda nu prinsese, era încă în faza de „originalitate", s-au găsit să-l combată, cine? — nu niște matematicieni, ci un teatru de revistă care introdusese niște cuplete, cu jocuri de cuvinte pe tema infinitului mic... Un rol deosebit pentru introducerea analizei în Franța l-a avut... Voltaire. Sigur nu era un matematician de prima mînă (poate nici de-a doua) dar era — se știe — un om de

spirit și cu o mare autoritate în cultură. El a fost un susținător de prestigiu al filozofiei naturale, pentru că era el însuși un filozof progresist. Dar atmosfera nu o creează numai lucrările serioase, ci și unele întîmplări amuzante. Ne permitem să amintim una.

Maupertuis (1698—1759) a rămas în știință prin principiul minimei acțiuni și prin unele studii asupra punctelor singulare și de inflexiune. Ca om însă, se pare că era cam înfumurat. Întîi căpitan de dragoni, Maupertuis se apucă de matematică cu succes și devine, în 1723, membru al Academiei. Deoarece după teoria lui Newton pămîntul trebuia să fie turtit la poli, au fost instituite două comisii însărcinate să măsoare 1° din meridian, una în Peru, a doua, sub conducerea lui Maupertuis, la Polul Nord. Se zice că mai mult au lucrat membrii comisiei decît „responsabilul" ei. Totuși, la întoarcere, în 1737, Maupertuis pune pe un pictor să-i facă portretul, înfățișîndu-l înfofolit în blănuri și cu o mînă turtind pămîntul...

Numit președinte al Academiei din Berlin, îl exclude pe König din academie, pentru că acesta combătuse principiul minimei acțiuni. Apoi îl exclude și pe Voltaire, pentru că acesta luase apărarea lui König. Dar Voltaire reacționează... voltairian: publică *Diatriba doctorului Akakia*, un pamflet scînteietor plin de ironii și maliție la adresa lui Maupertuis. Judecînd bine, nici Voltaire nu este leal. Fiindcă este mai spiritual decît adversarul său, nu înseamnă că are, și în fond, dreptate. E un abuz de putere — aici de putere... spirituală. Spun asta fiindcă scriu pe românește și românii sînt amatori de glume, spirite, anecdote; trăsătură simpatică, dar se întîmplă uneori că o teză serioasă cade din cauza unei glume reușite — ceea ce, evident, nu e just.

Să-nchidem însă și această paranteză, pentru a reveni la ideea din titlu. Astfel de scene creează o preocupare, dacă nu o modă propriu-zisă, în jurul problemelor analizei. Și aceasta contribuie *din afară* la promovarea ei. Progresul real îl realizează, evident, cei ce muncesc *înlăuntrul* ei, din motive mai adînci.

Neputînd da o istorie completă, să cităm totuşi cîteva date, mai mult cu titlu de exemplu.

L'Hôpital (1661—1704)

A scris primul manual de calcul diferenţial, intitulat *Analiza infiniţilor mici pentru studiul liniilor curbe*. Accesibilă, reeditată de mai multe ori, această lucrare a contribuit mult la înţelegerea şi răspîndirea ideilor noi. Ca parte nouă — ceea ce numeam în clasificarea de mai sus, probleme de completare — el conţine ceea ce se numeşte de atunci regula lui L'Hôpital (dacă $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, atunci limita raportului $f(x)/g(x)$ cînd $x \to a$ este $f'(a)/g'(a)$; de exemplu $\lim\limits_{x \to 0} \sin x/x = \cos 0 = 1$).

Familia Bernoulli

Se cunosc familii vestite de muzicieni (Bach, Strauss etc.). Bernoulli-i reprezintă analogul acestei situaţii în matematică. Situaţie ciudată sau explicabilă? Pare ciudată, simplă coincidenţă, s-ar putea să nu fie însă pur întîmplătoare; poate că, în anumite condiţii, talentul — muzical sau matematic — se moşteneşte, dar nu se ştie care sînt aceste condiţii.

Fraţii Jacques (1654—1705) şi Jean (1667—1748) au fost în corespondenţă cu Leibniz punîndu-şi reciproc probleme ca: studiul curbei lănţişorul — forma pe care o ia un lanţ susţinut de două verigi sub acţiunea greutăţii —; al spiralei

logaritmice — cu ecuaţia $\rho = a e^{k\theta}$ —; aria unui triunghi sferic; brahistocrona (traiectoria unui punct pe o suprafaţă descrisă în timp minim); asupra seriilor; funcţia exponenţială şi logaritmică etc.

Fiii lui Jean, Nicolas (1687—1759), Daniel (1700—1782), pe lîngă alte lucrări, se remarcă prin aplicarea analizei la probabilităţi.

Mac Laurin (1698—1746)

A scris *Teoria fluxiunilor*, în care şi lămureşte expunerea lui Newton şi o completează: tratează atracţia unui elipsoid asupra unui punct din interior, printr-o ingenioasă metodă geometrică (Lagrange o apreciază: „O capodoperă de geometrie care poate fi comparată cu tot ce Arhimede ne-a lăsat mai frumos şi mai ingenios". Reiese că, cu toată aprecierea pentru metodele generale ale analizei, metodele geometrice directe bazate pe ingeniozitate stîrnesc încă admiraţia).

A demonstrat propoziţia — admisă de Newton fără demonstraţie — o masă fluidă ce se roteşte în jurul unei axe trecînd prin centrul de greutate ia forma unui elipsoid de revoluţie.

A stabilit formula lui Mac Laurin

$$f(x) = f(o) + xf'(o) + x^2 \cdot \frac{f''(o)}{2!} + \ldots + x^n \cdot \frac{f^{(n)}(o)}{n!} + \ldots$$

foarte interesantă prin aceea că ea arată: dacă cunoaştem amănunţit funcţia *într-un punct* (valoarea ei şi a derivatelor ei succesive), o putem afla *într-un domeniu* (în care seria de puteri este convergentă). Scrierea unei funcţii ca serie de puteri — cînd acest lucru este posibil — e foarte utilă, cum am arătat pe un exemplu, de altfel palid, privitor la arctg x.

Dezvoltarea fusese dată anterior și de Taylor dar fără demonstrație. (În cărțile de analiză uzuale, formula lui Mac Laurin e prezentată ca un caz particular al formulei lui Taylor, lăsîndu-se impresia că meritul lui Mac Laurin ar fi numai acela de a face a = 0!).

Pentru că am pomenit despre contrastul între filozofia lui Leibniz și a lui Newton, menționăm că Mac Laurin combate — pe drept, dar cu o vehemență tare, neobișnuită „în lumea senină" a științei — pe Descartes și pe Leibniz.

Dăm, de curiozitate, un citat:

„Nu a existat poate niciodată o întreprindere mai extravagantă decît aceea de a deduce, prin consecințe necesare (logic), toată structura universului și o explicație completă a naturii din cîteva idei (...)

Doctrina lui Descartes a fost supusă la diferite corecții. (...); baza este atît de slabă și tot edificiul atît de rău construit încît ar fi fost mai bine să-l părăsim cu totul și să lăsăm să rămînă numai ruinele lui pentru a servi posterității ca monument al aiurelii sistemelor pretențioase ale filozofilor".

Urmează considerații analoge despre teoriile lui Leibniz privitoare la monade, rațiunea suficientă, armonia prestabilită.

Se pare că atacul lui Leibniz la adresa lui Newton fusese mai moderat: „Domnul Newton și partizanii săi au o foarte amuzantă părere despre Dumnezeu și opera lui. După ei, Dumnezeu are nevoie să-și întoarcă ceasornicul din timp în timp... nu a avut destulă pricepere să-i imprime o mișcare perpetuă..."

Îngîmfarea lui Maupertuis și sarcasmul lui Voltaire, ironia fină a lui Leibniz și vehemența lui Mac Laurin (surprinzătoare la un gentleman englez), polemica Newton-Leibniz, ne arată că și oamenii mari sînt totuși oameni. Nu numai pentru că și ei beau și mănîncă... Dar admirația noastră pentru latura pozitivă, supraumană ca nivel nu ca natură, a personalităților lor rămîne întreagă.

D'Alembert Jean le Rond (1717—11783)

Autor, împreună cu Diderot, al vestitei *Enciclopedii*, care promovează idei progresiste, formînd unul din factorii pregătitori ai Revoluției.

În 1743, scrie un important tratat de dinamică.

În Analiză, apare și ca creator (criteriu de convergență; teorema fundamentală a algebrei) și ca sistematizator. Este unul din precursorii analizei riguroase prin adoptarea metodei limitelor (care va înlocui noțiunea neclară de infinit mic).

Lagrange Joseph-Louis (1736—1813)

Membru al Academiei din Berlin, apoi al celei din Paris. Profesor la Școala normală superioară și la Școala Politehnică, cele două școli mari ale Franței create de Revoluție.

Publică tratate mari: Mecanica analitică; Teoria funcțiilor analitice; Lecții elementare de matematici ș.a. Creațiile sale sînt la un nivel superior; pe lîngă formula creșterilor finite, care se face și în liceu, cităm: dezvoltarea în serie a funcțiilor de mai multe variabile, metoda variației constantelor în rezolvarea ecuațiilor diferențiale, ecuații cu derivate parțiale — chestiuni cu care cititorul va face cunoștință mai tîrziu.

Mi se pare demn de semnalat și faptul că Lagrange este inițiatorul sistemului de lucru la Gazeta matematică, cu un rol atît de important în formarea tinerilor. Apărea o revistă a elevilor și absolvenților Școalei politehnice. În 1805, Lagrange scrie redacției: revista „îmi pare proprie să întrețină o emulație printre tineri (...) cred că unul din mijloacele de a o face utilă este de a însera chestiuni scurte ale căror soluții pot fi publicate în numărul următor. Anexez o astfel de chestiune și dacă încercarea reușește aș putea să mai trimit multe altele".

Laplace Pierre Simon (1749—1827)

Profesor la Şcoala militară, are ca elev pe Napoleon, care în 1799 îl face ministru (nu pentru mult timp; îi reproşează că introduce „infiniţii mici" şi în lucrările de administraţie).

Opera fundamentală: Mecanica cerească (în 5 volume), despre care Napoleon a spus „este chemată să dea o nouă strălucire secolului în care trăim." (Nu ştiu de ce, influenţat de textele pe care le consult, îl citez pe Napoleon, în loc de a cita oameni mai puţin renumiţi, dar mai în materie. E un păcat curent, a judeca o opinie după prestigiul celui care o afirmă, chiar dacă acest prestigiu a fost cîştigat într-un domeniu cu totul străin.)

Laplace are lucrări de mare importanţă şi în Teoria analitică a probabilităţilor şi în Teoria potenţialului.

EULER LEONHARD (1707—1783)

— cel mai strălucit reprezentant al matematicii euristice —

Omul

Născut la Bâle (Elveţia). Tatăl său era teolog (creştin reformat), dar studiase şi matematica cu Jacques Bernoulli. Studiile superioare şi le face Euler tot la Bâle, avînd ca profesor pe Jean Bernoulli. Acesta îi acordă în fiecare sîmbătă o întrevedere în cursul căreia discută progresele matematice făcute în cursul săptămînii de elevul său.

Nu studiază însă numai matematica. În 1725, se înscrie la facultatea de medicină, avînd în vedere intrarea la Academia din Petersburg (actualul Leningrad), unde exista un loc vacant în specialitatea fiziologie. În acelaşi timp, face

și studii de fizică și susține în 1727 o teză în vederea numirii la catedra de fizică din Bâle.

Este chemat ca membru al Academiei din Petersburg la secția de matematică; va lucra în acest post pînă la sfîrșitul vieții. O perioadă — între 1744 și 1766 — se stabilește în Berlin, fiind însărcinat cu conducerea Academiei de științe din acest oraș, continuînd a lucra și pentru Academia din Petersburg, care îi acordă în continuare salariul de academician.

A fost foarte prețuit atît de guverne cît și de forurile științifice și în general de toți oamenii cu care intra în contact. Iată cîteva scene care dovedesc aceasta.

În 1760, Prusia și Rusia fiind în război, armatele au devastat o fermă pe care o avea Euler în apropiere de Charlotenburg. Îndată ce generalul rus află de aceasta, dă dispoziții ca Euler să fie despăgubit cu o largă aproximație prin adaos, iar Țarina Elisabeta, aflînd și ea, adaugă un dar de 4 mii de florini.

În 1771, un incendiu la Petersburg cuprinde și locuința lui Euler. Un vecin, fără a gîndi la propria-i casă, aleargă, îl ia pe bătrîn în spate și îl salvează. Totul cade pradă focului, afară de un singur lucru: manuscrisele lui Euler, considerate deci mai prețioase decît orice alte lucruri. S-au dat imediat dispoziții să i se construiască o locuință mai bună decît cea care arsese.

Un ministru englez îi scrie: „Majestatea sa m-a autorizat să vă înmînez un onorariu de 1 000 de ruble pe care vă roagă să-l primiți ca mărturie a stimei pe care o are pentru lucrările Dvs."

Cînd publică *Teoria nouă a Lunii*, Parlamentul englez votează o gratificație pentru autorul ei.

Academia din Paris îi acordă premii pentru lucrări în mai multe rînduri iar, în 1755, deși nu exista nici un loc vacant, îl alege ca membru.

Aș vrea să mă opresc puțin asupra *caracterului* lui Euler ca om, întrucît am impresia că el explică un anumit aspect semnificativ al operei.

Să existe oare vreo legătură între activitatea matematică și caracterul acelui care o desfășoară? O oarecare legătură pare a se fi desprins dintr-un anumit aspect Kepler: matematicianul care apare un om „calculat" și în probleme ale vieții care prin inefabilul lor nu-s de calcul. Alte trăsături de caracter par a fi independente de calitatea de matematician. Au existat matematicieni cu credință în Dumnezeu sau chiar bigoți, alții atei, fără ca cele 2 planuri să interfereze grav. Au existat matematicieni înfumurați (v. Maupertuis) și alții modești; aici, faptele în sine nu mai spun mare lucru. Știm ce a dat un înfumurat; nu știm ce ar fi putut da fără acest caracter; anumite legi psihologice arată că ar fi dat mai mult.

La o altfel de legătură ne gîndim aici. Influențează caracterul omului, caracterul operei sale matematice? Dar se poate vorbi de un caracter al operei, reflectînd aspecte subiective? În artă și literatură, desigur. În filozofie, probabil. Dar și în matematică? Aici opera nu e ceva foarte obiectiv, deci foarte independent de omul care a produs-o? În general, da. În anumite cazuri — Euler fiind cazul cel mai semnificativ — opera reflectă omul.

Am prea puține date în față privind viața lui Euler. Mă silesc, cu ele, să-i reconstitui figura. Nu reușesc să-l văd tînăr; îl văd numai bătrîn, mai exact spus ca un bătrînel. De genul bunicului din schița lui Delavrancea. Euler a iubit viața de familie și a avut foarte mulți nepoți. 38. Îi plăcea să-i aibă în jurul său, să-i simtă în preajmă-i, să glumească, să se joace cu ei.

Cea mai caracteristică scenă din viața lui, e aceea a momentului morții. Iată cum o povestește Condorcet: „În 7 septembrie 1783, după ce se distrase calculînd pe o tăbliță legile mișcării aerostatelor, luă cina cu dl. Lexell și familia sa, vorbi despre planeta lui Herschell. Apoi, chemă pe un nepoțel cu care glumea în timp ce-și lua ceaiul, cînd, deodată, pipa îi scăpă din mînă și încetă să mai calculeze și să mai trăiască".

Trebuie reținută și expresia „după ce *se distrase* calculînd". Mi se pare extrem de veridică; mi se pare că imboldul principal al uriașei sale activități matematice a fost acesta,

distracția, satisfacția intrinsecă a punerii în lucru a inteligenței. Ambiția, setea de glorie nu ar fi putut conduce la o activitate atît de susținută și, mai ales, cu atît de bogate rezultate. A primit, cum am văzut, recompense. Dar, cred, acestea îi veneau, nu le căuta înadins. Ele i-au creiat condiții; dar nu au constituit cauza, motorul cercetării. Se distra — acesta e termenul cel mai propriu. Cum altfel să ne explicăm că alături de probleme importante și „serioase", el își găsește timp să se ocupe cu chestiuni de geometrie elementară sau cu jocuri matematice? Că dintr-un joc de societate el face, punînd amprenta geniului său, rădăcinile unei mari discipline matematice moderne — aceasta arată că pentru el nu exista graniță între matematica serioasă și matematica-joc, că aceasta nu era un simplu joc care să-l abată, să-l distreze cum se zice după „muncă" — așa cum un altul ar face turism sau muzică — munca lui era distracția lui și distracția lui era muncă.

De altfel, satisfacțiile spiritului nu erau numai de ordin matematic. Avea o cultură vastă — în primul rînd științifică: matematică, fizică, chimie, științele naturii, medicină — dar și umanistă; cunoștea istoria tuturor popoarelor, literatura, știa pe dinafară pasagii lungi din versurile lui Virgil, Eneida în întregime, și îi făcea plăcere să le spună altora sau să le murmure pentru sine.

„Temperament mereu egal, o bună dispoziție dulce și naturală, o anumită causticitate amestecată cu bonomie, un fel de a povesti naiv și glumeț, făceau conversația sa pe cît de plăcută, pe atît de căutată" — spune prietenul său, matematicianul Fuss.

Nu știu cu ce sentimente va fi primit onorurile și răsplățile bănești — probabil tot cu bonomie, cu un ușor zîmbet în care se strecura și un strop de ironie și puțină uimire. Mai semnificativ e cum a primit nenorocirile; tot cu un ușor zîmbet în care durerea era întîmpinată cu uimire și atenuată de un strop de ironie și de o mare, aducătoare de pace, resemnare. Citesc în istoria pe care o consult că în 1735, din cauza muncii excesive, are o congestie cerebrală și își pierde ochiul drept. „Voi avea mai puține distracții" — a spus. Este drept,

gîndirea matematică foarte concentrată îți cere să închizi ochii la ce se petrece în jur; dar a face din acest fapt obiectul unei ușoare glume care așterne resemnarea peste o mare nenorocire personală — dezvăluie o trăsătură de caracter rară, specifică.

După ce în 1766 revine la Petersburg, își pierde și celălalt ochi. Orbirea completă îl va sustrage cercetării? De loc. Problemele matematice sînt pentru Euler însăși viața lui, partea ei esențială. Nu va înceta să calculeze decît în momentul cînd va înceta să trăiască. Are o memorie prodigioasă, vede cu imaginația formulele, le citește cu mult mai bine, decît ar face-o cineva cu ochii — așa cum unii șahiști joacă „à l'aveugle" (fără a avea tabla în față) cîștigînd la adversari care o privesc cu cea mai mare atenție. Dictează secretarului său (în fond, omului care îi face toate serviciile necesare unui orb) lucrări uimitoare, în aceste condiții, și prin volumul lor: Tratatul *Elemente de algebră* în 3 volume groase, *Dioptrica*, *Teoria nouă a Lunii*.

Euler nu a scris lucrări de filozofie, ca mulți dintre predecesorii săi. Dar a privit viața — și succesele și loviturile ei — cu o mare înțelepciune. Și oare, față de filo-sofie = înțelepciune în teorie, nu este de preferat această subtilă înțelepciune pe viu?

Opera

Impresionează întîi aspectul cantitativ. Numai titlurile lucrărilor sale ocupă 50 de pagini mari. Cîteva titluri de tratate:

Tratatul practic de Mecanică (1741), în care mecanica primește o expunere metodică, unitară, cu aspectul deductiv bine pus în evidență.

Teoria nouă a luminii (1746). Se știe că Huygens este creatorul teoriei ondulatorii a luminii, pe cînd Newton considera raza de lumină ca un flux de particule. Prestigiul

lui Newton era atît de mare încît multă vreme teoria ondulatorie a fost dată uitării. (Ca să ne dăm seama de puterea acestui prestigiu, menţionăm aici un alt fapt: în secolul 18, *s-a contestat existenţa meteoriţilor* — cum să cadă *la întîmplare* nişte corpuri din cer, cînd Newton stabilise o ordine perfectă în mişcarea corpurilor cereşti? Deci se contesta un fapt vizibil, evident; abia în 1794 se ajunge la recunoaşterea faptelor. Cum s-ar fi putut îndoi oamenii asupra naturii luminii din optica lui Newton, mai puţin evidentă?)

Euler este primul care are şi curajul şi probitatea de a supune unei critici obiective, de înalt nivel ştiinţific, teoria lui Newton.

Teoria corpusculară avea să reînvie *într-o formă nouă* abia la începutul secolului nostru, iar în 1924 apărea o sinteză superioară între teoria ondulatorie şi cea corpusculară.

Tratat asupra construcţiei şi manevrării vaselor (1749) tradus imediat în englezeşte şi în franţuzeşte, pentru folosul pe care îl aducea navigaţiei.

Introducere în analiză (1748), tratat clasic de analiză, cu multe şi valoroase contribuţii proprii.

Introducere completă în algebră (1770)

etc.

Varietatea de probleme

Nu numai tratatele groase — asupra cărora nu am făcut o enumerare completă — dau o idee a aspectului cantitativ, ci şi extrem de numeroasele memorii, tratînd probleme mai izolate, publicate cele mai multe în Comunicările Academiei din Petersburg.

Acestea dau însă, în mod pregnant, şi o idee despre *varietatea* de probleme care l-au preocupat pe acest cel mai fecund matematician.

Un indicator statistic — poate cam superficial, dar care reflectă şi el o realitate: *Istoria matematicii* de la Descartes pînă la mijlocul secolului al XIX-lea de *H. Wieleitner*

(Ed. științifică, 1964), are 500 de pagini; în 138 de pagini apare numele Euler, acesta fiind dintre toate numele proprii din această carte, cel mai des folosit (urmat de Lagrange, cu 85 pagini, Newton 61 pagini, Fermat, Leibniz cu cîte 50 pagini, Descartes 41 etc. deci cu procente între 60% și 30% față de Euler).

Din cele 850 de lucrări ale lui Euler, în jur de 300 sînt de mecanică, 40 de mecanică aplicată, 100 de astronomie, 100 de fizică. Nu știu dacă acel care a făcut clasificarea a ținut seamă că unele lucrări nu pot intra numai în una din aceste rubrici; de exemplu, cînd demonstrează că „un punct care se mișcă fără accelerație pe o suprafață descrie o geodezică (linia de pe suprafață care reprezintă drumul cel mai scurt, pe ea, între două puncte date ale ei)", nu se distinge dacă cel mai important aspect este problema de mecanică, cea de geometrie diferențială sau cea de ecuații diferențiale.

Referindu-ne numai la rubrica „matematică", găsim și în ea o mare varietate; dăm nu o enumerare — care ar lungi enorm expunerea — ci doar cîteva exemple, despre care să putem vorbi, fie și aluziv, la nivel elementar.

Teoria numerelor. Jumătate de secol după crearea analizei nu mai apare vreo lucrare remarcabilă în acest domeniu, tocmai din cauză că atenția matematicienilor este absorbită de problemele deschise de analiză. Euler face mai mult decît toți în rezolvarea acestor probleme, dar ele nu-i consumă întreaga capacitate de lucru. El se îndreaptă către toate problemele care necesită *ingeniozitate*, și cele de teoria numerelor au, în primul rînd, acest caracter.

Să menționăm teoria resturilor de puteri.

Un exemplu numeric pe care l-am recomandat, vorbind despre Fermat, ne ajută să presimțim ce variate și frumoase probleme se deschid. Una din aceste probleme se referă la resturile *pătratice*. În cazul modulului 13, ele sînt:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2
1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Vom numi *nonresturi* (la Euler, non residua), resturile care nu apar aici: 2, 8, 6, 11, 5, 7. Vom observa — apoi vom

demonstra afirmația corespunzătoare în cazul general — că resturile patratice sînt date de puterile de exponent par ale lui 7, iar non resturile de cele de exponent impar (v. pag. 142)

Generalizînd, vom numi numărul n rest sau non rest patratic față de numărul prim 13, după cum el este sau nu de forma $n = \mathbf{M}\,13 + r$ ($r = 1, 4, 9, 3, 12, 10$); analog pentru un număr p prim, oarecare.

În legătură cu aceste resturi, Euler descoperă una dintre cele mai frumoase teoreme din teoria numerelor, numită *legea reciprocității:*

p și q fiind două numere prime impare, 1) în cazul cînd cel puțin unul este de forma $4k + 1$, dacă p e rest față de q, și q este rest față de p.

2) în cazul cînd ambele sînt de forma $4k + 3$, dacă p este rest în raport cu q, atunci q este non rest în raport cu p și invers.

Exemple: $p = 13$, $q = 17$. Sîntem în cazul 1 ($13 = 4k + 1$) q este rest față de p (de ex. $11^2 = \mathbf{M}\ 13 + 17$) rezultă că și p este rest față de q; în adevăr, $8^2 = \mathbf{M}\ 17 + 13$.

Această teoremă a fost demonstrată riguros de către Gauss care i-a dat șase demonstrații diferite.

De atunci, ea a preocupat pe mulți dintre cei mai mari matematicieni: Cauchy, Iacobi, Zolotarev, Kronecker, Dedekind, Hilbert etc.

În 1931, ea avea 56 de demonstrații diferite. Și teorema lui Pitagora are foarte multe demonstrații — dintre care am relatat cîteva — dar ele sînt diverse variante pe același principiu: combinații de arii. Demonstrațiile legii reciprocității sînt distincte între ele și ca idee.

Pentru filozofia cunoașterii, se pune problema; cum e posibil ca o teoremă să primească peste 50 de demonstrații — fiecare destul de complexă — în timp ce alte teoreme — tot din teoria numerelor — nu și-au găsit nici o demonstrație generală, în ciuda unor uriașe eforturi?

Euler s-a mai ocupat, deschizînd drumuri noi pe care s-au ilustrat în special Legendre și Lagrange, cu rezolvarea ecuațiilor de forma $ax + by = c$ în numere întregi, ca și cu ecuații diofantice (în numere întregi), de grad superior;

a demonstrat teorema că ecuaţia $x^3 + y^3 = z^3$ nu are soluţii în numere întregi; cu numerele perfecte prietene; cu criterii de a stabili dacă numere foarte mari sînt prime; cu distribuţia numerelor prime; a creat teoria fracţiilor continue etc.

În geometria elementară. Pe lîngă teoreme frumoase foarte cunoscute (punctele O, G, H sînt colineare; cercul celor nouă puncte; $d^2 = R(R - 2r)$ etc.), Euler s-a ocupat şi cu probleme care păreau simple jocuri, dar prin care el poate fi considerat un precursor al teoriei moderne a grafurilor sau al unor probleme de topologie.

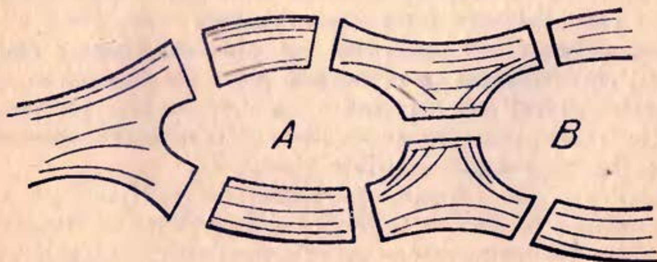
Amintim problema celor 7 poduri (să se ajungă din A în B — figura 72 — trecînd pe toate podurile şi fără a trece de două ori pe acelaşi) şi problema poliedrelor regulate.

În algebră. A enunţat teorema lui D'Alembert (o ecuaţie algebrică de grad n are n rădăcini), a introdus ecuaţiile reciproce, a pus în evidenţă „rezolventa" (reducerea unei ecuaţii la una de grad mai mic), a arătat metode de aproximare a rădăcinilor etc.

În analiză. A dat remarcabile dezvoltări în serie. De exemplu, relaţia

$$\frac{\pi^2}{6} = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

impresionează în primul rînd ca enunţ: operaţii numai cu numere naturale, suma patratelor inverselor lor, legată de un număr dintr-un alt domeniu, raportul între lungimea cercului şi diametru.



Fig, 72

O altă relaţie, de asemenea impresionantă şi prin enunţ,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln (n + 1) + C$$

unde C este o constantă — constanta lui Euler, asupra căreia s-au făcut numeroase cercetări.

Euler a studiat funcţiile elementare. În special, el este creatorul trigonometriei moderne. A arătat cum se întocmesc tabele trigonometrice; de exemplu

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} \cdots$$

unde α este în radiani. Cititorul poate face o verificare a tabelelor pe care le foloseşte, calculînd cu această serie sin 1°, sin 2° etc. (după ce exprimă gradele în radiani); se va convinge că pînă la 4° obţinem 3 zecimale exacte folosind numai primul termen al seriei.

Relaţia $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
este plină de consecinţe. Pentru $x = \pi$, se obţine $e^{i\pi} = -1$, care leagă aceste atît de importante numere e, π, i, 1.

Din păcate, nu putem pomeni decît numele unor creaţii de mare valoare ca: integrale eliptice, integrala dublă, ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, extremele funcţiilor de mai multe variabile, calcul variaţional etc.

În geometria analitică, Euler a studiat curbele şi suprafeţele reprezentate prin ecuaţia generală de gradul 2.

În geometria diferenţială, a studiat curburile secţiunilor normale, suprafeţele desfăşurabile (aplicabile pe plan; pe lîngă con şi cilindru, şi suprafaţa formată de tangentele la o curbă strîmbă), reprezentarea în plan a suprafeţelor sferice (problema hărţilor) etc.

Să adăugăm la această enumerare, din păcate foarte seacă, şi o altă lucrare care subliniază varietatea de preocupări: *O nouă teorie asupra Muzicii* (lucrare „căreia i s-a reproşat de a conţine prea multă geometrie pentru muzicieni şi prea multă muzică pentru geometri" — reproş semnificativ, căci marchează dificultatea de contact între o gîndire larg cuprinzătoare şi un cititor specialist, limitat).

Am dat numai exemple. În această vastă varietate de probleme, o notă comună: fiecare din ele impresionează prin *ingeniozitate*. Marele spirit al lui Euler a fost îndreptat mereu spre probleme frumoase, spre acţiunea pasionantă de a descoperi noi proprietăţi.

A trăit într-o epocă în care această tensiune spre frumos nu mai conducea la un fel de artă pură, ea se îmbina în chipul cel mai fericit cu tensiunea fundamentală spre cunoaşterea realităţii.

Iată cum am gîndit

«Euler prefera să-şi instruiască elevii decît să-şi acorde mica satisfacţie de a-i uimi; şi el credea că nu face destul pentru ştiinţă, dacă nu adaugă la adevărurile noi cu care o îmbogăţea, expunerea naivă a ideilor care-l conduseseră la acestea.» (Condorcet)

Am citat după „Matematica şi raţionamentele plauzibile" (Ed. ştiinţifică, 1962).

Gauss (1777—1855), numit „principele aritmeticii", cel mai mare matematician al timpului său, atît prin inventivitate cît şi prin *rigoarea şi generalitatea* teoriilor pe care le-a creat, spune în prefaţa la una din marele lui opere (Disquisitiones arithmeticae): „Dacă în multe chestiuni dificile am folosit demonstraţii sintetice şi *am suprimat analiza care m-a condus la ele*, am făcut-o din dorinţa de a fi concis." Pe stampila sa personală era gravat un arbore cu cîteva fructe înconjurat cu deviza *Pauca sed matura* (puţine dar coapte); printre manuscrisele sale s-au găsit lucrări foarte interesante pe care el nu le-a considerat destul de „coapte" pentru a fi publicate. Gauss obişnuia să spună: „cînd un monument este oferit privirilor publicului, nu trebuie să mai rămînă urme ale schelelor care au servit construcţiei".

Iată deci doi dintre cei mai mari matematicieni cu concepţii opuse asupra redactării textului matematic. Aceste două

„stiluri" în expunere reflectă două realităţi de fond distincte: matematica-proces şi matematica-rezultat. Am mai vorbit despre ele în capitolul despre Arhimede (pag. 92).

Matematica-rezultat este o construcţie pur logică, impecabilă ca rigoare, cu un stil lapidar, de inscripţie.

Matematica-proces este, cum frumos exprimă Gauss, *schela* care a servit acestei construcţii; ea înglobează *activitatea* care a condus la descoperirea enunţului sau a demonstraţiei lui, activitate complexă plină de ezitări, ocoluri, dibuiri, efervescenţă.

Matematica-proces este ca o reacţie chimică, în plină fierbere — atît în plan intelectual, prin multiplicitatea încercărilor, cît şi în plan afectiv, prin întinsa gamă de emoţii — este soluţia tulbure înainte de cristalizare, matematica-rezultat este cristalul însuşi.

Nu e nevoie de un nivel matematic înalt pentru a ne da seama de aceste două realităţi. Rezolvarea unei probleme de geometrie elementară este un proces de creaţie în mic — *aceeaşi esenţă*, la altă scară. Şi fiecare dintre noi a avut o astfel de experienţă: ne-am muncit cu o problemă ceasuri întregi, fel de fel de încercări, eşecuri, întoarceri, speranţă şi decepţii... pentru ca, la un moment dat, în faţa soluţiei să exclamăm: ce simplă era! cum de nu mi-a dat imediat în cap! Regretăm ocolurile pe care le-am făcut, ele ne apar umilitoare pentru orgoliul nostru, de aceea ne grăbim să le uităm, ne fixăm atenţia numai pe soluţia-cristal şi pe ea o comunicăm altora. Cu cît redactarea este mai succintă cu atît creăm impresia de a fi găsit imediat soluţia.

În redactarea matematicii-rezultat distingem, din nou, două stiluri: stilul-inscripţie, avînd ca rădăcini necesităţi obiective, structura logică a matematicii; stilul *ermetic*, avînd rădăcini psihice: tendinţa autorului de a ascunde propriile-i căutări, de a epata cititorul, făcîndu-l să creadă că teoria expusă este foarte profundă — foarte încîlcită pentru cititor deci cu atît mai meritoriu pentru autor care e capabil să o prindă în cîteva rînduri.

Chiar la Descartes, acest apologet al ideilor clare și distincte, găsim uneori un stil în mod intenționat obscur. El o și mărturisește: „Nu am omis nimic decît înadins. Am prevăzut că anumiți oameni care se grozăvesc că știu totul, nu ar fi pregetat să spună că tot ce am scris ei știau dinainte, dacă m-aș fi făcut destul de inteligibil pentru ei".

Și despre Gauss unii oameni au spus că ar fi vrut să fie neinteligibil pentru a părea profund. Impresia mea este că, la Gauss, motivul principal al lapidarității este tendința, pozitivă, spre matematica-inscripție.

Facem însă abstracție de cele două motivări posibile și constatăm: covîrșitoarea majoritate a matematicienilor folosesc stil lapidar și se axează pe matematica-rezultat.

Expunerea matematicii-proces, atît de interesantă din punct de vedere psihologic, atît de utilă în educația matematică nu tentează pe nimeni. Euler este o excepție, cea mai fericită excepție, pentru că o astfel de expunere este cu atît mai prețioasă cu cît acel care o face este un mai mare matematician.

Polya spune: „Euler nu este unic; alți matematicieni, mari și mici, folosesc pe scară largă inducția în activitatea lor. Totuși, Euler mi se pare aproape unic într-o privință: *el se străduiește să expună probele inductive...*".

Aici am impresia că se reflectă *caracterul* lui Euler ca om; modestia lui, dezinteresul pentru lauri nemeritați (avea destui din acei meritați), interesul lui viu pentru actul matematic în sine și, mai ales, bonomia lui, dragostea lui pentru oameni, nevoia de a le împărtăși — în conversații despre poezia greacă sau în scrieri despre descoperirile matematice — satisfacțiile de ordin spiritual, fără a-i umili inutil, dimpotrivă călăuzindu-i cu prietenie, cu înțelepciune.

Cu o sinceritate deplină, de-a dreptul surprinzătoare pentru acei avizi să-și ascundă slăbiciunile pentru a apărea mai grozavi, demnă de admirație și de recunoștință din partea acelor dornici să învețe de la acest maestru al gîndirii euristice — Euler expune fidel cum a ajuns *să bănuiască* un adevăr, să-și *întărească* treptat convingerea prin verificări nume-

rice sau prin raționamente neriguroase, plauzibile, ce încercări succesive a făcut pentru a trece de la astfel de convingeri de fapt la demonstrații propriu-zise. Expunerea este, în mod fatal, lungă căci tot lungi sînt și peripețiile *pe viu*, ale cercetării. Polya reproduce o astfel de expunere în capitolul VI al cărții citate și cititorul curios o poate căuta acolo. Vom reda, aici, după aceeași carte, procesul de gîndire — neriguroasă — prin care Euler a ajuns la una din frumoasele lui descoperiri.

Să considerăm un polinom numai cu termeni de grad par

$$P(x) = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2n}x^{2n}$$

Deoarece $P(x) = P(-x)$ rezultă că dacă x_1 este rădăcină atunci și $-x_1$ este rădăcină. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, -x_1, -x_2, \dots -x_n$ rădăcinile lui.

Putem scrie identitatea

$$1 + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} = \left(1 - \frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\right)\dots\left(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\right)$$

căci polinomul din membrul II *are aceleași rădăcini* iar pentru $x = 0$, obținem $1 = 1$.

Făcînd înmulțirile și identificînd, obținem și relația

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = -a_2 \qquad (1)$$

Din dezvoltarea în serie de puteri a lui sin x, avem

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 \dots$$

iar funcția $\frac{\sin x}{x}$ are rădăcinile π și $-\pi$, 2π și -2π, 3π și -3π etc.

Dacă privim seria de puteri ca un polinom și aplicăm relația (1) (avînd aici $x_1 = \pi$, $x_2 = 2\pi$, $x_3 = 3\pi$ etc.), obținem

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \dots = \frac{1}{6}$$

deci

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Metoda nu este riguroasă; ceea ce este valabil pentru un polinom — cu un număr *finit* de termeni — nu este în mod necesar valabil pentru „un polinom" cu o infinitate de termeni. Rezultatul găsit nu este sigur. Euler face verificări numerice și găsește că cele 6 zecimale calculate coincid. Probabilitatea că relația este justă crește. Apoi aplică metoda în cazuri noi, printre care și relații care fuseseră stabilite riguros pe altă cale și pe care el le regăsește în acest mod. Aceasta sporește și mai mult încrederea. Abia după 10 ani de la această descoperire, revenind la problemă, Euler reușește să dea relației o demonstrație propriu-zisă, esențial diferită de raționamentele care l-au condus la descoperirea enunțului.*

★

Matematica ultra modernă este caracterizată prin rigoare maximă în demonstrații și prin probleme cu idei foarte generale. În numele ei s-au exprimat aprecieri nefavorabile, uneori cu o manifestă nuanță disprețuitoare, la adresa lucrărilor lui Euler. Transpare în ele nu numai fatuitatea unor tineri, ci și tendința de a transforma trăsături pozitive într-un fel de modă exclusivistă, transpare și o anumită îngustime de orizont asupra esenței matematicii. Atitudine care ar duce la frînarea acțiunii de a expune matematica-proces, acțiune atît de rară, dar atît de utilă, care adaugă la marile merite ale lui Euler, un mare merit în plus, unic în felul său, pentru care i se cuvine nu numai admirație, ci și o ascultare atentă, receptivă.

---

* În cartea Probleme neelementare tratate elementar de A. și I. Iaglom (Ed. tehnică, 1962) este dată o demonstrație bazată pe relațiile $\sum_{n=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$; $\sum_{n=1}^{m} \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+2)}{3}$.

Capitolul XI

SPRE MATEMATICA ACTUALĂ

GEOMETRIA LUI LOBACEVSKI

O veche neliniște: propoziția lui Euclid asupra paralelelor este axiomă sau teoremă?

Ce importanță are această întrebare de vreme ce e „la mintea oricui" că printr-un punct se poate duce o singură paralelă la o dreaptă dată? Din punct de vedere practic — al practicii imediate — nu ar avea importanță; și nici dacă atenția noastră este captată de problema descoperirii de noi și *ascunse* proprietăți — așa cum era la preeuclidieni, așa cum este încă la mulți pasionați ai geometriei — dacă, altfel spus, ne plasăm în punctul de vedere al matematicii euristice.

Dacă însă ne plasăm în punctul de vedere al matematicii ca sistem logic, întrebarea devine esențială. Și alte propoziții sînt la mintea oricui — de pildă: că un triunghi cu două laturi egale are și unghiurile opuse lor egale; desigur, de ce ar fi unul mai mare ca altul? — și totuși, dacă e posibil, *se demonstrează*.

Mulți, foarte mulți iubitori ai geometriei euclidiene, ca să vadă dacă propoziția paralelelor se poate demonstra (dacă ea este teoremă), cum e și normal... au încercat s-o demonstreze. Începînd cu Euclid însuși; se vede acest lucru din modul cum și-a alcătuit opera. A lucrat cît a putut, fără propoziția paralelelor — doar, doar va găsi elemente pe care să sprijine demonstrația ei. Primele 28 de propoziții sînt independente de propoziția paralelelor; abia, după acestea, pentru a putea merge mai departe, a introdus-o pe aceasta ca o axiomă (ce se adaugă celorlalte). După Euclid, nu numai imediat după,

ci în decursul tuturor secolelor pînă în al 19-lea, apar diverse încercări de demonstrare eşuate sau diverse „demonstraţii", care la o analiză mai atentă se dovedesc a avea vicii de raţionament.

Dacă propoziţia ar fi teoremă — şi toţi care încearcă să găsească demonstraţia au impresia, bănuiala sau chiar speranţa că aşa este — găsirea demonstraţiei ar elucida chestiunea. Dar dacă ea este axiomă? Să fim atenţi; în acest caz, insuccesul nu demonstrează nimic. Faptul că eu sau tu sau el sau 1000 de oameni nu au reuşit să găsească o demonstraţie nu spune nimic. Poate că ea este posibilă şi nu am găsit-o noi sau poate că ea nu e, nici în principiu posibilă. Dubiul persistă.

Istoria a înregistrat, obiectivă cum e, numeroase încercări de demonstraţie. Dar nu toate au aceeaşi însemnătate. Le-am pune în trei categorii: *a)* unele sînt simple stîngăcii în care se reflectă pozitiv numai intenţia, strădania multiseculară de a căuta; *b)* altele sînt mai abile, viciul este mai ascuns şi pot da loc la un joc amuzant, la o nouă problemă de perspicacitate cu tema: *unde este greşeala?*

Se spune că Legendre ţine în faţa Academiei de Ştiinţe o comunicare cu titlul: demonstrarea propoziţiei lui Euclid. Dar la un moment dat, se întrerupe, ezită, apoi exclamă: „trebuie să mă mai gîndesc !" Sesizase o greşeală care se strecurase în raţionamentul pe care îl expunea;

c) altele, în fine, au o valoare ştiinţifică propriu-zisă; în încercarea de a demonstra propoziţia, s-au stabilit leme în vederea ei. Evident, pentru ca ele să stea la baza demonstraţiei pentru propoziţia paralelelor trebuie să fie independente de ea, să n-o presupună (altfel ar fi un cerc vicios: demonstrez un lucru de care m-am servit anterior). Pînă la urmă demonstraţia în sine s-a dovedit falsă, dar lemele care s-au stabilit just rămîn valabile, se încorporează edificiului geometric. Ansamblul propoziţiilor în care nu se presupune o propoziţie asupra paralelelor (nici a lui Euclid, nici o alta) formează un sector separat care s-a numit *geometria absolută.* Primele 28 de propoziţii din Euclid (stabilite, cum spuneam, *înainte* de introducerea paralelismului) împreună cu lemele juste

găsite în decursul încercărilor de a demonstra propoziția paralelelor formează geometria absolută.

*

În ultima categorie se află lucrările lui Sacherri (1667—1733, cu opera *Euclid spălat de toate petele: experiența stabilirii primelor principii ale întregii geometrii*); Lambert (1728—1777, *Teoria liniilor paralele*); Legendre (1752—1833, *Elemente de geometrie)*.

Legendre este un matematician remarcabil vestit și prin tratatul său de *Teoria numerelor* ca și prin alte lucrări importante. De asemenea, Lambert, care a lucrat în domenii variate (iraționalitatea lui π, a logaritmilor; proiecția stereografică, trigonometria sferică etc.).

Situația lui Sacherri este oarecum ciudată. Să citim anii în care a trăit și să ne amintim că e tocmai perioada în care analiza a deschis un cîmp de cercetare extraordinar de fertil, fascinant pentru majoritatea cercetătorilor. Într-o asemenea atmosferă, noi cercetări într-o problemă învechită, asupra căreia au asudat inutil sute de cercetători? Își au, *uneori*, și demodații rolul lor. Dacă Saccheri ar fi lucrat în analiză, ar fi descoperit o nouă dezvoltare în serie sau o nouă integrală, pe care cu siguranță, așa, au descoperit-o alții. Lucrînd într-o problemă demodată, Saccheri a devenit, fără să-și fi dat seama, un precursor; un precursor într-o disciplină matematică nouă, mai nouă decît analiza și care avea să aducă fie direct, fie indirect, un spirit nou în întreaga matematică.

O schimbare fundamentală de punct de vedere

În jurul anului 1825 doi matematicieni încă obscuri atunci, iluștri astăzi, lucrînd independent unul de altul — la mare distanță și în spațiu: János Bolyai la Tîrgu-Mureș și Lobacevski la Kazan — adoptă un punct de vedere

nou: propoziția lui Euclid nu a putut fi demonstrată, în ciuda marilor eforturi făcute în acest sens; probabil nu poate fi, nici în principiu, demonstrată. Problema se schimbă: nu să căutăm o demonstrație a propoziției *ci să demonstrăm că ea nu poate fi demonstrată*.

O astfel de demonstrație ar conduce la încadrarea ei definitivă printre axiome și ar face să înceteze, ca inutile, încercările de a o demonstra.

Ideea a avut-o și Gauss, dar el nu publica decît lucrări bine puse la punct. Bolyai a avut o descurajare pricinuită de întîrzierea publicării. Lobacevski a dus lucrurile pînă la capăt în ciuda neînțelegerilor pe care le-a întîmpinat, chiar din partea unui matematician mare ca Ostrogradski. De aceea N.I. Lobacevski (1792—1856) este considerat pe drept creatorul geometriei neeuclidiene și supranumit „Copernicul geometriei" prin schimbarea punctului de vedere.

A demonstra că un anumit lucru nu este posibil pare un lucru minor — o simplă *negație*; s-ar părea că interesante cu adevărat sînt lucrurile pe care le putem face. Nu este așa. În primul rînd, a demonstra că ceva nu se poate — privind aceasta nu ca o neputință de fapt, ci ca o imposibilitate în principiu — e un lucru, în anumite cazuri, foarte greu — avem deci aici o performanță a spiritului. În al doilea rînd, demonstrînd pe nu se poate, eforturile cheltuite prin prisma lui „poate că s-ar putea" încetează și ele devin disponibile în direcții fructuoase. Așa s-a întîmplat — am amintit aceasta vorbind despre lucrări ale lui Gauss — cu problemele celebre de construcție cu rigla și compasul. Nu exact la fel, dar în mod analog, s-au întîmplat lucrurile cu unul din principiile de bază ale fizicii: al conservării energiei. Multe — desigur chiar mult mai multe decît încercările de a construi cu rigla și compasul figuri neconstruibile sau decît cele de a demonstra propoziția paralelelor și probabil că istoria nu a reținut decît o mică parte din ele — au fost încercările de a construi un „perpetuum-mobile", o mașină care să se miște fără încetare, singură. Încercări eșuate; nu s-a găsit în fapt un „perpetuum mobile". Atunci s-a enunțat un principiu (principiul conservării energiei, Sadi Carnot, 1796—1832), conform căruia per-

petuum mobile *este imposibil*. Acest principiu nu primește o demonstrație de tip matematic; el se justifică prin metodele fizicii-matematice: îl admitem ca punct de plecare; constatăm că tot ce se deduce logic pe baza lui se verifică practic; conchidem — cîtă vreme aceste condiții sînt îndeplinite — că principiul este just. Apare astfel partea pozitivă, utilă a ceea ce părea la început o simplă negație.

Revenind la problema în discuție, nici aici opera lui Lobacevski și Bolyai nu este o simplă negație, nu se mărginește la a stabili că propoziția lui Euclid nu poate fi demonstrată — deci o trecem printre axiome și închidem problema.

Pe lîngă acest aspect de elucidare a unei preocupări vechi, opera acestor matematicieni are și o parte pozitivă; ea nu arată numai ce nu se poate, arată și ce se poate; se poate face un lucru surprinzător și minunat, o nouă geometrie, o geometrie neeuclidiană.

Noțiunea de axiomă își schimbă înțelesul

Să căutăm să ne imaginăm cum a gîndit Lobacevski. Poate că și el a început prin a încerca să demonstreze unicitatea paralelei. El va fi încercat *metoda reducerii la absurd*. Să admitem, prin absurd, că propoziția nu e adevărată (că prin A nu trece numai o dreaptă care să nu taie dreapta d); ar rezulta de aici... — ceea ce este absurd, deci supoziția noastră că propoziția e falsă cade, deci ea e justă, e demonstrată. Acesta ar fi tiparul demonstrației prin reducere la absurd.

Numai că aici acest tipar nu se potrivește; ar rezulta de aici..., rezultă din presupunerea că propoziția lui Euclid e falsă o propoziție, și alta și alta, o serie întreagă de propoziții, dar nu mai apare constatarea „ceea ce e absurd", nici una din consecințele presupunerii făcute nu este absurdă, toate sînt admisibile. Este drept că ele sînt „ciudate", dar această ciudățenie nu șochează decît *intuiția* noastră, expe-

rienţa noastră de fapt. Important e că aceste consecinţe pot fi gîndite fără a se călca nicidecum logica. Şi atunci?

Atunci, modificăm textul de mai sus, ştergem pe „prin absurd". În loc de să admitem prin absurd, începem aşa: Admitem că propoziţia Euclid e falsă. Se deduc de aici logic următoarele propoziţii.

Să lămurim întîi ce înseamnă admitem că propoziţia lui Euclid e falsă şi să examinăm dacă putem admite aceasta nu „prin absurd", ci în mod permis, neabsurd.

Există o dreaptă trecînd prin A, nesecantă cu d — aceasta este *o teoremă* (de geometrie absolută). În adevăr (fig. 73), ducem AB perpendicular pe d şi d_1 perpendiculara în A pe AB. Dacă d_1 ar întîlni pe d, s-ar contrazice teorema că dintr-un punct se poate duce o singură perpendiculară pe o dreaptă. Problema care se deschide: există numai una sau mai multe?

Admitem că există numai una; admiţînd aceasta, am afirmat axioma lui Euclid. Putem însă *admite* — fără a cădea în absurd — că există mai multe; admiţînd aceasta, am afirmat axioma lui Lobacevski.

Să presupunem că ducem o secantă prin A (fig. 74) şi o rotim în jurul lui A astfel că punctul M se îndepărtează spre dreapta. Va veni un moment cînd M dispare; ştim aceasta cu siguranţă pe baza teoremei *există* o nesecantă. Fixăm în acest moment nesecanta d'; dreapta d' are proprietăţile: 1) este nesecantă; 2) *oricît de puţin* am roti-o în sens invers ea devine secantă.

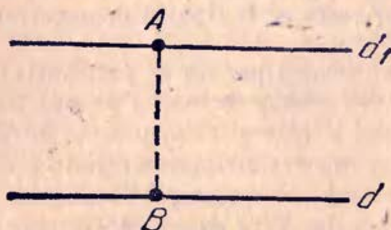


Fig. 73

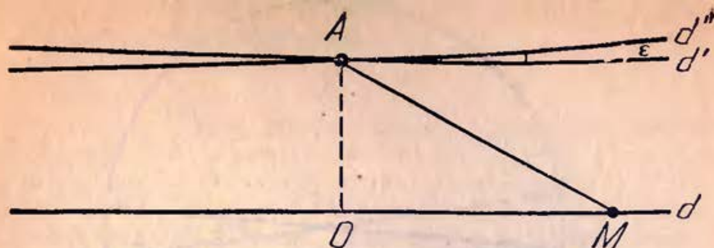


Fig. 74

Dreapta d'', simetrica dreptei d' față de AO este și ea 1) nesecantă; 2) oricît de puțin am roti-o în sens direct, ea devine secantă.

Să rotim pe d' în sens direct; dacă oricît de puțin am roti-o, apare punctul M de intersecție cu d (spre stînga) înseamnă că d' și d'' se confundă și avem în acest caz axioma lui Euclid. Putem însă admite că rotind pe d' cu un unghi destul de mic, în sens direct nu apare un punct de intersecție. În acest caz, dreptele d' și d'' sînt distincte și orice dreaptă din unghiul ε pe care ele îl formează este nesecantă. Admițînd aceasta, avem axioma lui Lobacevski; numind dreptele d' și d'' paralele iar celelalte nesecante cuprinse în unghiul lor superparalele, enunțul ei este: printr-un punct A exterior dreptei d se pot duce două paralele și o infinitate de superparalele.

Ca să ne dăm seama mai bine că „putem admite" această axiomă, să ne imaginăm că punctele de la infinit ale planului ar fi pe un cerc (fig. 75, în care cercul ni-l închipuim mult mai mare); dreptele duse prin A sînt 1) secante dacă taie coarda $D''D'$ în interior, 2) nesecante, în caz contrar; paralele sînt acum dreptele $d' = AD'$ și $d'' = AD''$ (care taie pe d la infinit), iar superparalele sînt celelalte drepte prin A, care nu taie de loc coarda $D''D'$.

Nu este absurd să admitem axioma lui Lobacevski; din punct de vedere logic o putem admite. Dar „trebuie" s-o

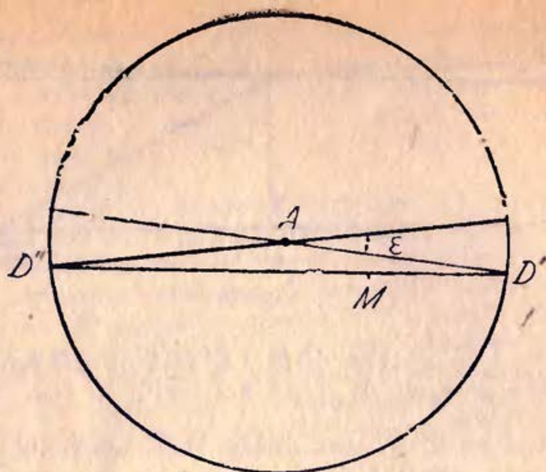


Fig. 75

admitem, este „bine" s-o admitem, are vreun sens această admitere? Este ea conformă realității?

Deocamdată nu ne punem această întrebare. Atenţia noastră e fixată pe faptul dacă putem construi pe baza ei un sistem de propoziţii logice, coerent, lipsit de contradicţii. Putem. Aceasta este — repetăm: deocamdată — suficient.

Înţelesul vechi al cuvîntului axiomă — care a intrat şi în limbajul comun — „un adevăr *evident* fără demonstrație" se schimbă. Pentru matematicianul obişnuit cu raționamentele riguroase nimic nu este evident. Şi, de altfel acest „evident" e ceva foarte subiectiv; ceea ce este evident pentru X nu este la fel pentru Y. Înţelesul nou al cuvîntului *axiomă: o propoziție pe care o admitem ca punct de plecare al raționamentului* — fără să precizăm *de ce* o admitem, fiind suficient ca prin admiterea mai multor axiome să nu ajungem la contradicţii de ordin logic.

Importanţa acestei noi concepţii asupra axiomei se va vedea nu peste mult timp.

Exemple de teoreme din geometria lui Lobacevski

Toate propozițiile din geometria absolută sînt valabile și în geometria lui Lobacevski (căci ele nu presupun nici un fel de axiomă asupra paralelismului). Geometria lui Euclid și geometria lui Lobacevski au *ca parte comună* geometria absolută. De aici, geometria se bifurcă; geometria absolută împreună cu axioma lui Euclid și cu toate teoremele în a căror demonstrație se folosește — direct sau indirect — această axiomă formează geometria euclidiană (o vom nota g.E.); din nou geometria absolută împreună cu axioma lui Lobacevski și cu toate teoremele care o presupun formează geometria lui Lobacevski (o vom nota g.L.).

Să nu ne mire deci că găsim în g.L. enunțuri care intră în contradicție cu cele din g.E. (și care, din această cauză ni se par ciudate) — de vreme ce chiar axioma paralelelor din g.L. o contrazice pe cea din g. E.

Enunțuri cu siguranță contradictorii găsim prin examinarea *propozițiilor echivalente cu postulatul lui Euclid.*

O propoziție este echivalentă cu axioma lui Euclid (prescurtat a.E.) dacă:

1) admițînd a.E. rezultă logic acea propoziție

2) reciproc: admițînd acea propoziție ca axiomă rezultă din ea — ca o teoremă — a.E.

Astfel de propoziții conduc printr-un procedeu simplu de reducere la absurd la teoreme din g.L.

Suma unghiurilor unui triunghi. Teoremele Legendre-Saccheri (de geometrie absolută) afirmă (nu dăm aici demonstrația):

1. Suma unghiurilor unui triunghi nu poate fi mai mare ca 2 unghiuri drepte — deci $s \leqslant 2$ dr. (Nu s-a putut demonstra dacă $s < 2$ dr. sau $s = 2$ dr.)

2. Dacă există un triunghi în care $s = 2$ dr. atunci în orice triunghi, $s = 2$ dr.

Exemple. 1) *Propoziție echivalentă cu a.E.:* există un triunghi în care $s = 2$ dr.

S-a demonstrat această echivalență; că din a.E. rezultă $s = 2$ dr. se știa, dar s-a demonstrat și reciproca: dacă admitem (ca pe o axiomă) că există un triunghi în care $s = 2$ dr., rezultă de aici — ca o teoremă — că printr-un punct se poate duce o singură paralelă la o dreaptă.

Din această echivalență, rezultă următoarea:

1') *Teoremă în geometria lui Lobacevski.* În orice triunghi $s < 2$ dr.

Sîntem în g.L.: am admis a.L. deci orice enunț care contrazice această axiomă este (aici) absurd.

Demonstrația teoremei este acum imediată: $s > 2$ dr. nu poate fi conform teoremei de geometrie absolută; dacă am avea $s = 2$ dr., ar rezulta că printr-un punct se poate duce o singură paralelă ceea ce contrazice axioma *noastră* (a.L.). Nu putem avea nici $s = 2$ dr. Rezultă $s < 2$ dr.

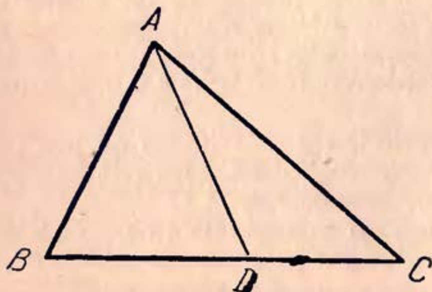
2) *Propoziție echivalentă cu a.E.*: în toate triunghiurile s este același.

În adevăr, dacă admitem a.E. rezultă *în orice triunghi* $s = 2$ dr., deci în toate triunghiurile același s.

Reciproc; să admitem că s este același în toate triunghiurile. Avem (fig. 76)

$$s_{ABC} = s_{ABD} + s_{ADC} - 2 \text{ dr.}$$

Din $s_{ABC} = s_{ADC}$, rezultă $s_{ABD} = 2$ dr.



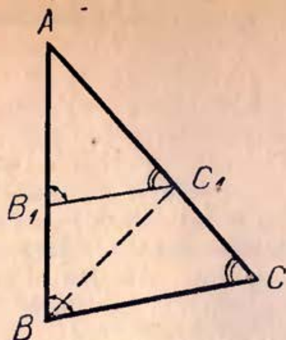


Fig. 77

Însă, s-a demonstrat anterior, că dacă există un triunghi cu $s = 2$ dr., rezultă a.E.

2') *Teoremă în g.L.* Nu toate triunghiurile au aceeași sumă a unghiurilor

(căci dacă ar fi așa ar rezulta a.E. ceea ce contrazice axioma noastră)

3) *Propoziție echivalentă cu a.E.*: Există două triunghiuri cu unghiuri respectiv egale și cu laturile omoloage neegale.

În adevăr, în g.E. există triunghiuri asemenea.

Să arătăm reciproca. Fie $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$, $AB > A'B'$ (fig. 77, unde triunghiul $A'B'C'$ a fost așezat în AB_1C_1). Rezultă că suma unghiurilor patrulaterului este 4 dr. (cele două din B_1 și cele două din C_1). Ducînd o diagonală, BC_1, rezultă $s_{(BB_1C_1)} + s_{(BC_1C)} = 4$ dr. Din $s_{(BB_1C_1)} < 2$ dr., ar rezulta $s_{(BC_1C)} > 2$ dr., ceea ce contrazice o teoremă de geometrie absolută.

Așadar $s_{(BB_1C_1)} = 2$ dr. și, existînd un triunghi cu $s = 2$ dr., rezultă axioma lui Euclid.

3') *Teoremă în g.L.* Două triunghiuri cu unghiurile respectiv egale sînt egale.

Dacă sîntem tentați să punem semnul !, să ne amintim că e vorba de *g.L.*

Este geometria lui Lobacevski necontradictorie?

Negînd axioma lui Euclid şi căutînd să vadă ce se poate deduce din propoziţia care o neagă, Lobacevski nu găseşte nici o contradicţie. De aici, concluzia că axioma lui Euclid nu poate fi demonstrată şi că există o geometrie diferită de a lui Euclid, perfect coerentă.

E riguroasă această concluzie? Încă nu. Lobacevski a dedus o serie de consecinţe. Dar lanţul deducţiilor posibile nu are sfîrşit. Şi în geometria lui Euclid se descoperă mereu proprietăţi, teoreme, probleme noi (mulţi elevi de liceu îşi manifestă spiritul de creaţie publicînd în Gazeta matematică probleme *originale*, noi). Oricît de departe ar fi fost împinse deducţiile, şi în geometria lui Lobacevski, drumul spre noi concluzii rămîne deschis. Nu s-a găsit nici o contradicţie, da. Dar de unde ştim că nu se va ivi o contradicţie mai tîrziu, cînd vom trage noi consecinţe? Aici, experienţa de fapt nu poate demonstra nimic, poate da numai o probabilitate, tot astfel cum verificarea unei teoreme pe un mare număr de cazuri particulare nu poate înlocui demonstraţia generală.

Cu ajutorul unor „modele" s-a stabilit că:

— *dacă s-ar ivi o contradicţie în geometria lui Lobacevski, ei i-ar corespunde o contradicţie în geometria lui Euclid.*

Dar nici despre geometria lui Euclid nu sîntem siguri că este necontradictorie, că nu ar fi posibil în principiu ca o deducţie din viitor să fie „absurdă".

Cu ajutorul unui model aritmetic, s-a stabilit că:

— *dacă geometria lui Lobacevski (deci şi a lui Euclid) ar fi contradictorie, atunci şi aritmetica ar fi.*

Alte geometrii neeuclidiene

Lobacevski şi Bolyai au negat propoziţia paralelelor, numai pe aceasta, căci în stadiul lor istoric, aceasta era în discuţie; ei au lăsat celelalte axiome neschim-

bate, au păstrat chiar anumite obişnuinţe euclidiene, lipsite de rigoare, în considerarea figurilor — cum ar fi de pildă criteriile de egalitate ale triunghiurilor, care sînt teoreme de geometrie absolută şi care se demonstrează prin suprapunere, deci printr-un procedeu care nu este riguros şi pur logic.

Dar impulsul fiind dat, existînd acum concepţia — confirmată printr-o experienţă de gîndire — că o axiomă poate fi schimbată, pentru a se crea o nouă geometrie, s-a mers, printr-o înclinare naturală a spiritului matematic, spre noi probleme cu aceeaşi structură.

S-au creat şi alte geometrii „neeuclidiene", cele mai importante fiind tot cele legate de problema paralelismului.

Am mai amintit că propoziţia „există o nesecantă prin A la dreapta d" constituie o teoremă de geometrie absolută. Dacă însă, negînd şi alte axiome, nu mai considerăm geometria absolută ca anterior stabilită, se poate nega şi această teoremă. Putem ajunge la o geometrie în care nu există nici o paralelă. Ca model pentru o astfel de geometrie, avem geometria pe o sferă, în care cercurile mari ale sferei sînt considerate ca „drepte" şi în care nu există drepte paralele.

Matematicianul german *Riemann* (G. 1826—1866) în dizertaţia sa *Despre ipotezele care stau la baza geometriei* (1854) a pus bazele unei geometrii foarte generale, folosind trei idei mari: *a)* posibilitatea unor geometrii neeuclidiene; *b)* geometria diferenţială a suprafeţelor; *c)* noţiunea de spaţiu cu n dimensiuni.

Şi, folosul?....

Pe bună dreptate un student din anul I întreba odată — descurajat probabil în faţa sarcinii de a studia lucruri atît de variate şi „grele" — : la ce bun atîtea geometrii?

Matematicienii s-au lăsat antrenaţi pe panta naturală a spiritului lor, construind geometrii numai cu grija coherenţei lor logice. Dar atîta este destul? Pe noi, ceilalţi oameni —

în munca de fiecare zi sau în tehnică sau în studiul științelor naturii — ne interesează care este *adevărul*, care din aceste geometrii este *conformă realității*.

Au făcut matematicienii, prin crearea acestor geometrii, un joc al spiritului — amuzant pentru acei atrași de o astfel de problematică — sau au adus și o contribuție efectivă la cunoașterea realității?

Nu se poate afirma că toți matematicienii care au lucrat în această direcție au fost conștienți sau au avut măcar presimtirea că fac și un lucru util. Lobacevski a fost preocupat de ideea conformității cu realitatea; el a căutat să *„măsoare"* suma unghiurilor unui triunghi pentru a vedea dacă nu cumva este mai mică de 180° și pentru că diferența pînă la 180° depindea — după cum stabilise — de arie, putînd fi și foarte mică, a făcut această măsurare pe un triunghi cosmic, cu vîrfurile în stele. Dar este destul de probabil că pe mulți dintre ei îi dirija numai pasiunea pentru probleme. Este însă stabilit astăzi că — indiferent de rădăcina psihică a acestei activități — aceste cercetări luate în ansamblu au avut un rol important în progresul cunoașterii.

Pentru problemele tehnice sau de viață la scara obișnuită, geometria conformă realității este bătrîna geometrie a lui Euclid. Dar la scara atomului? Dar în cîmpul fenomenelor în care au loc mișcări cu viteze apropiate de viteza luminii?

La începutul secolului nostru, în fizică s-a produs o criză din cauza unei experiențe — realizată de fizicianul american Michelsohn — legată de viteza luminii și a pămîntului în „spațiul absolut", experiență care dădea rezultate contrare față de cele prevăzute de teorie — de teoria atunci în vigoare. Trebuia creată o nouă teorie fizică a universului în care xperiența lui Michelsohn să-și găsească explicația. Fizicianul teoretic Albert Einstein a creat o astfel de teorie pe care a numit-o în prima ei fază teoria relativității, apoi, perfecționînd-o, teoria relativității generalizate.

O teorie fizică — în care este vorba de mișcări, despre spațiu și despre timp — are nevoie de un cadru geometric. În teoria lui Einstein este folosită și presupusă ca valabilă o geometrie neeuclidiană riemanniană. Dacă teoria lui Einstein

se dovedește a fi justă, înseamnă că geometria conformă realității este aceasta riemanniană. Cade, prin aceasta, mecanica lui Newton împreună cu geometria euclidiană presupusă ca valabilă în ea? În principiu da; dar, în practică, la scara obișnuită, nu. La viteze „mici" — sub 100 mii km/sec — — corecțiile care ar trebui făcute mecanicii newtoniene, pe baza teoriei lui Einstein sînt atît de mici încît pot fi fără nici o grijă neglijate. Numai pentru viteze mari sau în anumite fenomene la nivelul atomului, trebuie aplicată teoria lui Einstein. Mecanica clasică este numai o aproximație a celei einsteinene; tot astfel geometria euclidiană față de cea riemanniană. Dar este vorba de o aproximație, la scara fenomenelor obișnuite, atît de bună, încît putem spune că, la această scară, mecanica lui Newton implicit geometria euclidiană rămîn valabile.

Iată deci că o experiență sau o măsură izolată — de felul celei încercată de Lobacevski — nu ne pot da răspunsul la întrebarea — pe drept cuvînt, esențială — care este geometria conformă realității. Răspunsul îl dă teoria fizică a universului în întregul ei. O serie de observații asupra unor fenomene fizice — în special astronomice — prevăzute de Einstein, îi confirmă teoria. Dar nu putem spune că ea reprezintă cuvîntul ultim și definitiv. Nu este exclus să apară fenomene sau experiențe care să necesite o nouă teorie de sinteză pentru explicarea lor. Atunci, care va fi geometria utilă în cunoașterea realității?

Faptul că, atunci cînd Einstein își elabora teoria, geometria lui Riemann era construită, astfel încît primul n-a făcut decît s-o preia și s-o folosească, a constituit un mare avantaj pentru progresul științei.

E ca și cînd — spunem ca și cînd, pentru că nu a existat un plan explicit în acest sens — matematicienii ar construi mai multe geometrii logic posibile, pentru ca fizicianul să aleagă din ele pe aceea care este *și reală* — analog cum o plantă face multe semințe și nu se știe care dintre ele se va lipi de pămînt și va rodi. Sau analog cum un om învață mai multe limbi străine cu gîndul că nu se știe care din ele îi va servi odată.

Un folos de alt ordin

Problema folosului trebuie însă adîncită. Am văzut că, în conformitate cu teoria lui Einstein, o geometrie riemanniană este adevărată și că geometria euclidiană rămîne și ea extrem de utilă, ca o foarte bună aproximație, în multe probleme, și ușor de mînuit. Rezultă oare de aici că geometria lui Lobacevski rămîne complet în afara utilității? Cineva ar putea spune: era bine să fie studiată și aceasta cîtă vreme nu s-a știut care geometrie este cea reală; dar acum, acest studiu e lipsit de sens.

Importanța geometriei lui Lobacevski este în primul rînd de ordin istoric. Pentru un psiholog atent, este clar că nimănui nu i-ar fi venit în gînd să studieze diverse geometrii neeuclidiene, dacă nu ar fi deschis drumul aceasta, cea mai naturală. Cea mai naturală, pentru că ea a început prin încercarea de a demonstra axioma lui Euclid, problemă care devenise naturală prin „noua" concepție a lui Euclid asupra geometriei.

Importanța este am putea spune și de ordin pedagogic. Se spune că nu înțelegem cu adevărat propria noastră limbă maternă, decît atunci cînd învățăm o limbă străină; gramatica limbii străine ne face atenți cu punct de vedere rațional asupra propriei noastre gramatici pe care altfel o aplicam numai după impresie, analog vocabularul etc.; prin analogie, s-a spus că nu înțelegem bine geometria euclidiană — această „limbă maternă" a proprietăților spațiului, pe care o învățăm mai mult instinctiv decît rațional — decît prin prisma efortului de a învăța, rațional și comparativ, geometria lui Lobacevski.

Există însă un folos, să-l numim tot pedagogic, de ordin mai înalt. Geometria lui Lobacevski a învățat pe oameni să gîndească într-un mod nou. Ea ne-a învățat să ne desprindem din tirania intuiției, să judecăm prin criterii exclusiv logice. O astfel de „școală" era necesară; dovadă că și azi există oameni cărora le vine greu să admită că printr-un punct se pot duce o infinitate de nesecante. Nu se poate, spun ei, pentru mine e perfect clar că se poate duce una sin-

gură. Aceasta e un anumit gen de „claritate", cea dată de simțuri. Tot clar — dar în alt sens al cuvîntului — este nu faptul în sine că se pot duce mai multe nesecante, ci faptul că mintea noastră *poate admite* aceasta, cel puțin ca ipoteză de lucru intelectual.

Învățînd să raționeze fără sprijinul intuiției, ba chiar împotriva indicațiilor ei, adoptînd ca axiome „ceea ce admitem", indiferent că este evident sau nu, fiind astfel obligați să raționeze strict logic, oamenii au deschis noi domenii de cercetare: cele axiomatice.

Geometria lui Lobacevski nu este încă axiomatică, pentru că în bună parte se mai sprijină pe intuiție. Dar pentru că una din axiomele ei nu este conformă intuiției, ea constituie un antrenament, un exercițiu în direcția axiomaticii. E ca și cînd istoria ar fi un pedagog abil care dă elevului ei, umanitatea, un exercițiu mai accesibil, pentru a-l pregăti să abordeze după el o problemă propriu-zisă.

Un exercițiu nu are o aplicație practică imediată; dar el are, în mod evident, un folos de alt ordin.

Capitolul XII

MATEMATICA ACTUALĂ

Progresul în matematică

Progresul se realizează în două moduri: a) prin adaosuri; *b)* prin înlocuiri. Tramvaiul cu cai e un progres față de căruță; un progres prin adaos: se menține schema „calul trage", dar *se adaugă* șine de fier care fac tracțiunea mai ușoară. Tramvaiul electric e un progres față de cel cu cai; un progres prin înlocuire: s-au deshămat caii și *în locul lor* s-a pus un motor electric.

În științele naturii, există traiectorii continue de progres prin adaos, dar există și importante puncte nodale în care o teorie se elimină și se înlocuiește cu alta. Eliminăm teoria lui Aristot „forța întreține mișcarea" și punem în loc teoria lui Newton: „forța modifică viteza". Eliminăm sistemul geocentric și punem în loc, prin Copernic, mișcarea planetelor în jurul Soarelui. Eliminăm, prin Euler, teoria corpusculară a luminii, o înlocuim, revenind la cea ondulatorie; eliminăm undele „eterului" și le înlocuim, prin Maxwell, cu undele cîmpului electromagnetic; eliminăm și această teorie, printr-o negație dialectică, și o înlocuim, prin L. de Broglie (1924), cu o sinteză superioară, a dublei naturi, undă-corpuscul.

Cum se face progresul în matematică? În esență, prin adaos. $2 + 2 = 4$ de cînd lumea, va rămîne 4 cît va fi lumea. $(2 + i) + (2 + 4i) = 4 + 5i$, nu schimbă pe $2 + 2 = 4$; se adaugă niște operații cu numere *noi*. Dar de la metoda indivizibilelor la integrala Riemann nu e o înlocuire? În esență, nu.

E, mai curînd, o *perfecționare*. Acea metodă nu a dat rezultate greșite, ci numai neriguroase și parțiale; i s-a adăugat rigoarea și generalitatea.

Un matematician poate greși; șterge ce-a greșit și reface. Matematica în ansamblu nu greșește. Dă o soluție prea lungă sau neclară sau incompletă sau fără discuția tuturor cazurilor. A o scurta, a o clarifica, a o completa, a o discuta sînt acțiuni care nu anulează valabilitatea ei, sînt acțiuni care, în esență, adaugă, perfecționează. Soluția primă, imperfectă își păstrează un anumit rol. Cum am putea aprecia și gusta frumusețea unei soluții, scurtă și clară, fără fundalul și contrastul uneia lungi și confuze?

Ar fi însă o perspectivă mult prea îngustă a istoriei matematicii dacă am considera-o numai ca un simplu și mecanic proces de adăugare: încă o teoremă nouă, încă o demonstrație, mai riguroasă, pentru una veche. Aceste adaosuri aduc și importante transformări *calitative*; ele nu se referă însă la detalii, ci la construcția de ansamblu. Înșiși adausurile conduc în mod necesar la *reorganizarea* ansamblului. Aceleași cărămizi, o altă configurație. Enunțul unei teoreme izolate nu se schimbă. Locul teoremei în construcția întregului e schimbat. Și importanța ei: e o simplă verigă de legătură sau e o piatră unghiulară? Și sentimentul cu care o privim: era, cînd s-a născut, un eveniment extraordinar; devine, la bătrînețe, un enunț ofilit, banal, îi acordăm o pensie de merit pentru trecutul ei, nu ne mai punem nădejdea în ea pentru ce ar mai putea da.

Euclid a însemnat, cum am văzut, un astfel de moment de reorganizare, în cadrul căreia teoremele anterioare și-au schimbat și locul și timbrul.

Dar Euclid însuși, cu o viață atît de lungă, a îmbătrînit. Să-l recitim astăzi. Același text, alte accente. Strămoșii noștri citeau adevărul, noi citim implicațiile. Ei citeau suma unghiurilor este 180° și erau convinși că așa este. Citim aceleași cuvinte. Dar pe noi Lobacevski ne-a învățat să subînțelegem: *dacă* admit axioma lui Euclid *rezultă* $s = 2$ dr. Și deci să rămînem disponibili pentru *a admite* și altceva și a vedea ce altceva rezultă.

Ne vom mărgini la unele indicații în linii foarte mari; cititorul o va studia complet ca matematică, nu ca istorie.

Caracteristicile dominante ale matematicii actuale sînt tendința spre rigoare și cea spre generalizări — de altfel legate una de alta.

Figurile cele mai ilustre, reprezentative pentru aceste două caracteristici, sînt: Gauss K.F. (1777—1855), Cauchy A. (1789—1857), Galois Evariste (1811—1832).

Acești matematicieni sînt și inventivi și riguroși. Ei nu se mulțumesc să reorganizeze descoperiri anterioare ci, o dată cu această acțiune, adesea chiar în legătură cauzală cu ea, aduc și importante fapte noi, descoperiri proprii.

Gauss — despre care am mai avut prilejul să pomenim — reușește să dea demonstrații riguroase unor teoreme mari întrevăzute de înaintașii săi; cităm, ca exemple, teorema fundamentală a algebrei, legea reciprocității. Însăși deviza lui *pauca sed matura*, din care numai partea a doua corespunde realității — căci fructele date de Gauss nu sînt de loc puține, dar sînt în adevăr coapte — arată că, la el, cerința pentru rigoare este explicită, conștientă.

Dar el nu se ocupă numai cu teoreme izolate. În special în teoria numerelor el este creatorul *teoriei*; în loc de o mulțime de proprietăți curioase, apare o teorie unitară, generală — e drept, care nu acoperă tot domeniul — dar care ilustrează tendința care se va accentua apoi mereu de a înlocui fapte izolate prin teorii unitare.

Creațiilor lui Gauss pe linia rigoarei și a generalității li se adaugă importante cercetări euristice și aplicative, de pildă: teorema egregium, calculele lui în astronomie reprezentînd adevărate performanțe, lucrările lui în geodezie.

Să surprindem cele două trăsături la Cauchy — fără a putea vorbi nici măcar aluziv despre vasta lui operă.

Analiza s-a născut și s-a dezvoltat ca instrument în probleme de cunoaștere a realității fizice. De aici interesul și atenția îndreptate pe anumite funcții, acelea care se întîlnesc în aceste probleme. Iar funcția este gîndită ca o dependență *între mărimi*; în fața legilor lui Kepler atenția este solicitată de pildă de modul cum variază *aria* în funcție de timp. În propoziția aria măturată de raza vectoare Soare-Planetă este proporțională cu timpul, gîndim timpul în sine care „curge", gîndim aria în sine ca mărime care crește pe măsură ce timpul „trece". Nu avem nevoie de unități de măsură fixe, numerele intervin numai ca *rapoarte între mărimi de același fel*: aștept un interval de timp, se obține o arie; aștept încă un timp egal cu primul, rezultă o arie egală cu prima, deci la timpi dubli, arie dublă etc.

Newton însuși afirmă: „ating puritatea matematicii și filozofiei aceia care confundă cantitățile adevărate, cu relațiile dintre ele și măsurile lor obișnuite".

Timpul deține un loc important — cel puțin din punct de vedere psihologic — în conceperea noțiunilor analizei. Faptul $\lim_{x \to a} f(x) = b$ este „văzut" astfel: x se mișcă apropiindu-se mereu din ce în ce mai mult de a; în acest timp $f(x)$ se mișcă și el către b; în cazuri simple, apropiindu-se treptat de b; în alte cazuri se poate apropia, apoi depărta, apoi iar apropia dar distanța lui *maximă* de b e din ce în ce mai mică, pe măsură ce x e mai aproape de a. (Am putea compara fenomenul cu ce se întîmplă cu o capră legată de copac cu o funie care se scurtează mereu; cît îi permite funia, capra se poate mișca oricum, amplitudinea acestor mișcări posibile scade o dată cu funia.)

Legarea noțiunilor analizei de funcțiile-mărimi, întîlnite în probleme de fizică, aduce o anumită lipsă de claritate și precizie în definiții, de rigoare în demonstrație. Faptul că, în astfel de condiții, totuși matematica nu greșește se explică prin aceea că în practică întîlnim funcții simple, pentru care

raționamentele împletite cu intuiția sau chiar bazate pe ea, dau rezultate juste.

Pentru a introduce o clarificare era necesar un punct de vedere mai distanțat de problemele practicii, considerarea noțiunilor matematice în sine, un cadru mai simplu, mai general. Să nu ne mai referim la *mărimi* — multe, variate și, prin aceasta, complicate — să avem în atenție *numere*. Este posibilă o construcție a analizei care să aibă ca bază *numai* noțiunea de număr, în care definițiile și demonstrațiile au o structură strict logică, intuiția — vorbim de intuiția realității materiale și nu de aceea de tip matematic — nemaifiind necesară în mod esențial. Această construcție a fost realizată, în principal, de către Cauchy și ea s-a numit aritmetizarea analizei. $f(x)$ este un număr (real) bine determinat pentru fiecare valoare a lui x dintr-un interval dat. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ înseamnă că punînd condiția $|f(x) - b| < \varepsilon$, există un α astfel încît pentru orice x astfel că $|x - a| < \alpha$, condiția pusă este satisfăcută — și aceasta oricare ar fi ε (α depinzînd în general de ε). O definiție precisă, în care timpul nu mai intervine nici măcar într-o formă ascunsă, în care este vorba de o corespondență între numerele notate x și numerele $f(x)$ și de simple inegalități între numere.

Generalizări ale noțiunii de funcție reală

De la dependența între două mărimi, ca fenomen fizic, s-a trecut la corespondența între mulțimi de numere. Cum se realizează această corespondență?

În secolul al XVIII-lea printr-*un calcul* indicat printr-o *expresie*; x^2+5 înseamnă să ridicăm pe x la pătrat și la rezultat să adăugăm 5; sin x înseamnă să aflăm suma seriei respective etc. Acestea sînt funcțiile necesare — și suficiente — în problemele care preocupau atunci. Dar dacă preocuparea a devenit construcția logică a analizei, cu indiferență provi-

zorie la aplicațiile ei, devin interesante orice funcții care se pot imagina. După ce Cantor (1845—1918) introduce teoria mulțimilor, funcția este concepută ca o corespondență între mulțimi (de numere reale) date. Pentru ca funcția $f(x)$ să fie dată, se dau: mulțimea E, domeniul valorilor pe care le ia x; mulțimea F în care se află valorile lui $f(x)$; o corespondență prin care fiecărui x din E îi corespunde o valoare $f(x)$ din F. Ce fel de corespondență? *Oricare*. Poate fi dată printr-un simplu tabel dacă mulțimea E este finită (de ex. lui 2 îi corespunde 5, lui 7 îi corespunde 7; mulțimea de definiție e formată din două numere, 2 și 7, iar corespondența este dictată). Poate fi dată prin mai multe expresii, cîte una pe fiecare interval al domeniului de definiție etc. Dar, pentru proprietățile generale nici nu e nevoie de spus prin ce fel de corespondență se dă funcția, fiind suficient a ști că ea există.

Noțiunea de funcție de variabilă complexă

O a doua generalizare foarte naturală: de ce numai cu numere reale? Să luăm variabila un număr complex, z. Atunci $f(z) = z^2 + 5$, de pildă, este o funcție definită pe mulțimea numerelor complexe avînd ca valori tot numere complexe. Aici însă corespondența între z și $f(z)$ se ia întîi în cazurile cele mai simple, care se vor dovedi și cele mai utile. Cauchy ia drept condiție de bază derivabilitatea lui $f(z)$, care se definește ca și în cazul funcțiilor de variabilă reală, prin condiția ca $\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}$ să aibă limită cînd $z - z_1$ tinde la 0. Noțiunea de limită are aceeași definiție ca și cea reamintită mai sus, deosebirea fiind în faptul că inegalitățile $|z - a| < \alpha$, $|f(z) - b| < \varepsilon$ (α, ε reale) nu mai determină *intervale*, ci *cercuri* de centru a și rază α, respectiv b și ε, în planul complex.

Un alt matematician, Weierstrass (1815—1897) ia ca idee de bază *seriile* de puteri, $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots$ Limita șirului

fiind cu totul asemănătoare cu cea din cazul numerelor reale, schimbîndu-se numai interpretarea inegalităţilor de forma $|S_n - S| < \varepsilon$, la seria de puteri se va găsi în loc de un interval de convergenţă, un *cerc* de convergenţă.

Se stabileşte apoi un lucru surprinzător dar foarte interesant: cele două metode — Cauchy, Weierstrass — deşi pleacă de la idei diferite, conduc în fond la *aceleaşi funcţii*.

Folosirea numerelor complexe — care se numeau la început *imaginare*, — a născut multe controverse (ce rost are să ne ocupăm cu ele de vreme ce sînt imaginare?). Gauss este primul care le dă o fundamentare sistematică şi o interpretare *reală*.

Ezitările iniţiale s-au dovedit lipsite de temei cînd funcţiilor de variabilă complexă li s-au găsit aplicaţii deosebit de utile — şi deosebit de frumoase, de vreme ce pentru mulţi nu era de bănuit o legătură între numere *imaginare* şi aplicaţii *practice*. Ele sînt astăzi un instrument *esenţial* în mecanica fluidelor, în teorii privind distribuţia electricităţii etc.

Derivata areolară

Problema generalizării *corespondenţei* între z şi $f(z)$ rămîne însă deschisă. Meritul primei generalizări utile revine savantului român Dimitrie Pompeiu (1873—1954) care introduce în 1913 noţiunea de derivată areolară (ca limită a raportului $\frac{1}{2i} \cdot \frac{\int_\gamma f(z)dz}{\text{aria } \delta}$ unde aria δ — mărginită de conturul γ, care înconjoară punctul z_0 unde vrem să aflăm derivata — tinde la zero).

Cazul considerat de Cauchy al funcţiilor care au derivată în punctele unui domeniu apare în teoria lui Pompeiu ca un caz particular: al funcţiilor cu derivata areolară nulă (analoge deci cu constantele din cazul funcţiilor reale).

Această teorie este dezvoltată în numeroase lucrări, printre care locul de frunte îl deține școala matematică română, și își găsește interesante aplicații în fizică.

Un alt savant român, Simion Stoilov (1887—1961), va aduce contribuții însemnate la teoria funcțiilor de variabilă complexă, în special pe linia aprofundării și sistematizării acestui studiu în lumina ideilor topologiei moderne.

Galois

Acest genial matematician francez — din nenorocire mort la numai 21 de ani, în 1831, într-un duel — a adus o înnoire profundă în algebră. Opera lui, în principal memoriul pe care l-a scris în noaptea premergătoare duelului, a fost înțeleasă abia cu 30 de ani mai tîrziu iar importanța viziunii lui este sesizată abia în timpul nostru.

Algebra a fost pînă la el știința calculului. El arată importanța faptului de „a grupa operațiile, a le clasifica după dificultățile lor". Problema pe care și-o pune este următoarea: în ce condiții o ecuație algebrică de grad $n > 4$ admite o rezolvantă de grad mai mic ca n, în particular, în ce condiții o ecuație poate fi rezolvată prin cele 6 operații elementare. Pentru ecuațiile de grad $n \leqslant 4$, se cunosc „formule de rezolvare" în funcție de coeficienți. Pentru $n \geqslant 5$ nu există o formulă *generală* de rezolvare. Ca și în alte cazuri în care este vorba de o negație, întîi au existat încercări numeroase de a găsi o astfel de formulă. După eșecul încercărilor de fapt a urmat (prin Abel) demonstrația faptului că o astfel de formulă nu există. Galois a lămurit complet problema. Pentru aceasta, s-a servit de principiul enunțat mai sus, „a grupa operațiile", a analiza natura în mare a acestor operații și a considerat grupuri de substituții fiind, împreună cu Cauchy, inițiatorul teoriei grupurilor — cu o importanță deosebită în matematica actuală. Nu se pot da simple

indicații asupra „Teoriei lui Galois", una din cele mai complexe teorii matematice, dar era necesar să-i menționăm aici, cel puțin numele.

AXIOMATICA

Cele două tendințe spre rigoare și generalitate s-au accentuat și au condus, în secolul nostru, la disciplinele axiomatice, care constituie linia principală de preocupări ale matematicii în timpul nostru.

Axiomatica geometriei

În anul 1899, David Hilbert (1862—1943) publică lucrarea „Fundamentele geometriei"; ea marchează un punct nodal nu numai în concepția despre geometrie, ci și în aceea despre matematică în general, constituind un model și un impuls pentru disciplinele axiomatice actuale.

Pentru a ne da seama care este ideea de bază, să ne amintim ce sînt noțiunile matematice (despre care am mai vorbit la capitolul Tales și la Euclid). Unele noțiuni se dau prin definiții, care arată genul proxim și diferența specifică. Deci o definiție presupune neapărat alte noțiuni definite anterior. Poate și acestea au definiții, deci și ele au la bază alte noțiuni, acestea altele și așa mai departe, *trebuie să existe un capăt*, niște noțiuni de bază care nu mai pot avea definiții. Exemplu. Paralelogramul este *patrulaterul* în care... Dar patrulaterul? Acesta este poligonul cu 4 laturi. Poligonul? O linie frîntă închisă. Linia frîntă? Mai multe segmente care... *Segmentul?* Porțiunea din dreaptă între 2 puncte ale ei. *Dreapta?*

Aici ne oprim. *Dreapta nu are definiție.* Am văzut că Euclid încearcă o „definiție", care însă nu e o definiție propriu-zisă. În realitate (v. pag. 17), dreapta este o noțiune născută prin-

tr-un proces de idealizare a realității. De aceea, în geometria lui Euclid, anumite raționamente se sprijină și pe argumente *bazate numai pe figură*, deci care nu sînt riguroase.

A face din geometrie o construcție *pur logică* — aceasta este ideea lui Hilbert. Iar soluția pare azi simplă: de vreme ce trebuie să existe noțiuni care nu au definiții — s-o recunoaștem explicit: le vom numi noțiuni *primare*. De vreme ce vrem să lucrăm pur logic, să nu ne sprijinim pe considerații intuitive, legate de figură — *să nu le imaginăm*. Nu le definim, nu le imaginăm, atunci cum putem lucra cu ele? Hilbert arată că putem lucra pornind de la axiome.

Axioma 1. La două puncte distincte există o dreaptă și numai una în relația de incidență cu fiecare din ele.

Alte axiome:

2. Pentru oricare trei puncte A, B, C neincidente cu aceeași dreaptă, există un plan și numai unul în relația de incidență cu ele.

3. Dacă două puncte A, B sînt în incidență cu un plan, toate punctele dreptei AB sînt în incidență cu acel plan.

4. Dacă pentru două plane există un punct în incidență cu fiecare, mai există un astfel de punct.

În enunțul acestor axiome intră patru noțiuni primare: punct, dreaptă, plan, incidență. Nu știm „ce înseamnă" aceste cuvinte, nu le legăm de imagini — nici de acelea cu care sîntem obișnuiți, nici de altele.

Și totuși putem raționa folosind axioma, ca propoziție de legătură, împreună cu alte axiome.

În axioma 3 se vorbește despre dreapta AB; axioma 1 permite să folosim această expresie.

Iată acum o teoremă:

Fiind date două plane, α și β, sînt posibile trei situații:

1) sau nu există nici un punct incident cu fiecare din ele,

2) sau există toate punctele unei drepte incidente cu fiecare din ele,

3) sau planele sînt confundate.

În adevăr: dacă există *un* punct A în incidență cu α și β, conform axiomei 4, mai există unul B și conform axiomei 3, toate punctele dreptei AB sînt incidente cu ambele plane.

Dacă, pe lîngă punctele A și B, mai există un punct C, neincident cu dreapta dar incident cu fiecare plan, conform axiomei 2, cele două plane se confundă.

Situația 1) e, deocamdată, *posibilă*. Că ea există efectiv va trebui demonstrat, folosind și alte axiome.

Deoarece noțiunile primare nu au imagini, nici enunțului teoremei nu îi corespund niște imagini. Important e faptul că enunțul teoremei este *dedus* pur logic din axiome. Deci putem lucra cu elemente a căror natură nu o cunoaștem.

Care este rostul acestui mod de a lucra? Se obține nu numai o tratare riguroasă a geometriei, ci și o teorie mult mai *generală*. Dacă legăm noțiunile primare ce intră în aceste axiome, de imaginile obișnuite, unde incidență înseamnă *situat pe*, obținem geometria euclidiană. Putem însă atașa cuvintelor punct, dreaptă, plan, incidență orice alte înțelesuri concrete, cu condiția să fie satisfăcute axiomele. Atunci și toate teoremele deduse logic din axiome vor rămîne valabile. Deci o astfel de teoremă în care s-au folosit noțiuni *nedefinite*, poate fi „concretizată" într-o mulțime de moduri. O astfel de concretizare se numește un model. S-a făcut un singur raționament, pe cazul general; el rămîne valabil pentru o mulțime de teorii particulare, acelea care pot fi prezentate ca „modele" ale teoriei generale.

Ca exemplu, să arătăm modelul lui Poincaré. Drept puncte din axiome luăm punctele situate de o parte a dreptei D (fig. 78); prin incident înțelegem *situat pe*. Ca drepte din axiome luăm semicercuri cu centrele pe D și semidrepte

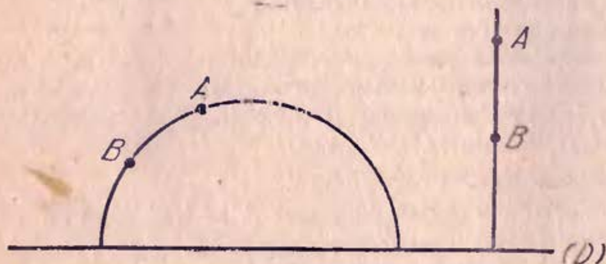


Fig. 78

perpendiculare pe D. Va fi satisfăcută axioma 1? Da; căci prin două puncte cu acest înțeles trece o „dreaptă" și numai una — cu înțelesul atribuit (semicerc, dacă A și B nu sînt pe o perpendiculară pe D).

O teoremă din teoria generală în enunțul căreia intră puncte și drepte dintr-un plan, ne va furniza o teoremă privitoare la semicercuri.

Rigoarea și generalitatea sînt caractere strîns legate între ele. Dacă în raționament s-a strecurat un lucru pe bază de intuiție, teorema astfel stabilită s-ar putea să nu mai fie generală, să nu mai fie valabilă într-un alt model, alt caz intuitiv decît cel folosit.

Algebra abstractă

Deși s-a dezvoltat mai tîrziu, în special, după 1920, algebra abstractă este mai ușoară decît axiomatica geometriei. Ideea de bază este aceea a *elementului nedefinit* (sau abstract, sau oarecare).

Considerăm o mulțime de elemente oarecare, a, b, c...; *admitem* că s-a dat o lege de compoziție internă, notată $\circ$, adică la oricare două elemente a și b ale mulțimii corespunde un element al mulțimii pe care îl notăm $a \circ b$. Admitem: 1) că legea este asociativă $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$; 2) că există un element neutru $e \circ a = a$. 3) că orice element a are un invers, adică există a' astfel că $a' \circ a = e$. 4) că legea este comutativă $a \circ b = b \circ a$.

Nu gîndim ce natură au elementele (sînt ele numere sau vectori sau polinoame sau transformări geometrice etc.); nu gîndim cum se face compunerea a două elemente (prin adunare de numere sau prin înmulțire sau prin compunere de transformări etc.); știm numai că ea există și că sînt verificate condițiile puse. Spunem că avem *un grup comutativ abstract*.

Deducem pur logic teoreme. Cînd apoi avem de studiat mulțimi cu elemente *definite* (numere, vectori etc.) este sufi-

cient să verificăm că aceste condiții pe care le-am pus la bază sînt verificate, pentru ca și teoremele deduse din ele să fie. Cu o singură teorie generală cuprindem mai multe teorii particulare.

Elementul nedefinit ne permite să ținem poarta „deschisă aplicațiilor celor mai diverse" — spune autorul algebrei abstracte.

Putem raționa cu elemente despre care știm atît de puține lucruri?

Să dăm ca exemplu o.

Teoremă. Ordinul unui subgrup divide ordinul grupului.

Prin ordinul unui grup se înțelege numărul elementelor lui în cazul cînd este *finit*; prin subgrup înțelegem o submulțime a grupului dat, care este și ea grup față de aceeași lege de compoziție. Să trecem la demonstrație. Scriem pe un rînd elementele subgrupului

$$a_1 = e, a_2, a_3, \ldots, a_m$$

Fie b un element al grupului care nu e și în subgrup. Scriem pe o a doua linie, elementele

$$a_1 \circ b, a_2 \circ b, a_3 \circ b, \ldots, a_m \circ b$$

Fiind vorba de o numărătoare, să arătăm că 1) elementele din linia a 2-a nu se află, nici unul, și în linia întîia; 2) că sînt distincte între ele.

1) Din $a_i = a_j \circ b$, ar rezulta $a_j' \circ a_i = a_j' \circ (a_j \circ b)$. Însă $a_j' \circ (a_j \circ b) =$ (cf. 1) $= (a_j' \circ a_j) \circ b =$ (cf. 3) $= e \circ b =$ (cf. 2) $= b$. Ar rezulta deci $a_j' \circ a_i = b$. Însă inversul lui a_j, a_j' este în subgrup, de asemenea $a_j' \circ a_i$; ar rezulta că b e în subgrup, contrar ipotezei despre b.

2) Din $a_i \circ b = a_j \circ b$, ar rezulta $a_i \circ b \circ b' = a_j \circ b \circ b'$ deci $a_i = a_j$.

Dacă prin aceasta, au fost scrise *toate* elementele grupului, înseamnă că ordinul lui n, este $n = m \cdot 2$.

Dacă mai există un element c nescris în liniile 1 și 2, scriem pe o a treia linie elementele

$$a_1 \circ c, a_2 \circ c, a_3 \circ c, \ldots, a_m \circ c$$

Arătăm ca și mai sus că aceste elemente sînt distincte între ele și distincte de cele scrise în primele 2 linii. Dacă

acum s-au scris toate elementele grupului, vom avea $n = m \cdot 3$. Dacă mai e unul nescris, analog găsim o linie de m elemente nescrise. La sfîrșit (n fiind finit, trebuie să existe un sfîrșit), elementele grupului vor fi așezate într-un tablou cu m elemente pe o linie; dacă sînt k linii, avem $n = m \cdot k$, deci m divide pe n.

Ca exercițiu, cititorul poate arăta că resturile 1, 2, ..., $p - 1$ de la împărțirea cu un număr prim p, unde luăm ca lege de compoziție $r_i \cdot r_j = r_k$ dacă $r_i r_j = Mp + r_k$, formează un grup; resturile date de puterile succesive ale unui rest formează un subgrup. În acest caz, din teorema demonstrată pentru un grup abstract, se va deduce teorema lui Fermat — care va fi pusă astfel într-o lumină nouă, mult mai lămuritoare. De asemenea, se va putea *generaliza* teorema lui Fermat pentru un grup finit oarecare.

Evident, teorema generală demonstrată va avea și multe alte aplicații.

Analiza generală

Noțiunea de bază a analizei este noțiunea de limită. Să revedem definiția ei, reamintită mai sus; intervin inegalități de felul $|x - a| < \alpha$. Dacă x și a sînt numere reale, această inegalitate arată că *distanța* între x și a situate pe axă este mai mică decît α. Dacă este vorba de numere complexe, x se reprezintă printr-un punct în plan, inegalitatea reprezintă tot faptul că distanța între punctele x și a este mai mică decît α, acum cu interpretarea: x e în interiorul unui cerc de centru a și rază α.

Cum putem *generaliza* această noțiune și, prin ea, întreaga analiză?

În loc de numere (reale, complexe) vom considera elemente ale unei mulțimi oarecare, de pildă „puncte" în spațiul cu n dimensiuni, înțelegînd prin „punct" n numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ într-o ordine dată. Dar cu mulțimi oarecare, fără nimic altceva, nu avem ce face. Vom generaliza noțiunea de distanță. Spunem că într-un spațiu (o mulțime) oarecare s-a

introdus o distanță, dacă la fiecare pereche (x, y) de elemente ale lui se atașează un număr d real cu următoarele condiții: 1) $d(x, y) = d(y, x)$; 2) $d(x, y) > 0$ dacă $x \neq y$; $d(x, y) = 0$ dacă $x = y$; 3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inegalitatea triunghiului).

Aceste condiții sînt condițiile esențiale ale inegalităților de care ne-am folosit la stabilirea teoremelor asupra limitelor.

Un spațiu în care s-a definit o distanță se numește spațiu *metric*. Într-un spațiu metric, avînd definită o distanță, vom putea defini în primul rînd limita unui șir (cu totul asemănător ca la șirurile de numere), apoi vom putea generaliza și alte noțiuni sau probleme de analiză.

Menționăm că spațiile metrice constituie numai una din generalizările posibile.

La capătul excursiei

Desigur aceste indicații atît de vagi nu pot da decît o simplă presimțire despre cîmpul vast al cercetării în matematica actuală și despre stilul, modul de a gîndi specific ei.

Important este să ne dăm seama că aceste construcții pur logice și foarte generale sînt rezultatul unei strădanii *umane* de milenii.

Matematica — pasiune pentru dezvăluirea implicațiilor ascunse, Matematica — sistem logic impecabil, Matematica — instrument esențial în procesul de cunoaștere a realității sînt aspecte principale, numai aparent și provizoriu distincte, ale unui fenomen de cultură unic, matematica în sine, fenomen care reflectă caracteristica esențială a naturii umane: gîndirea creatoare.

Matematica privită ca un întreg organic în permanentă creștere, matematica înțeleasă ca o îndelungată și pasionantă operă colectivă a oamenilor — este perspectiva pe care o deschide o excursie (fie ea și cu opriri numai în stațiile mari) în istoria ei.

CUPRINS